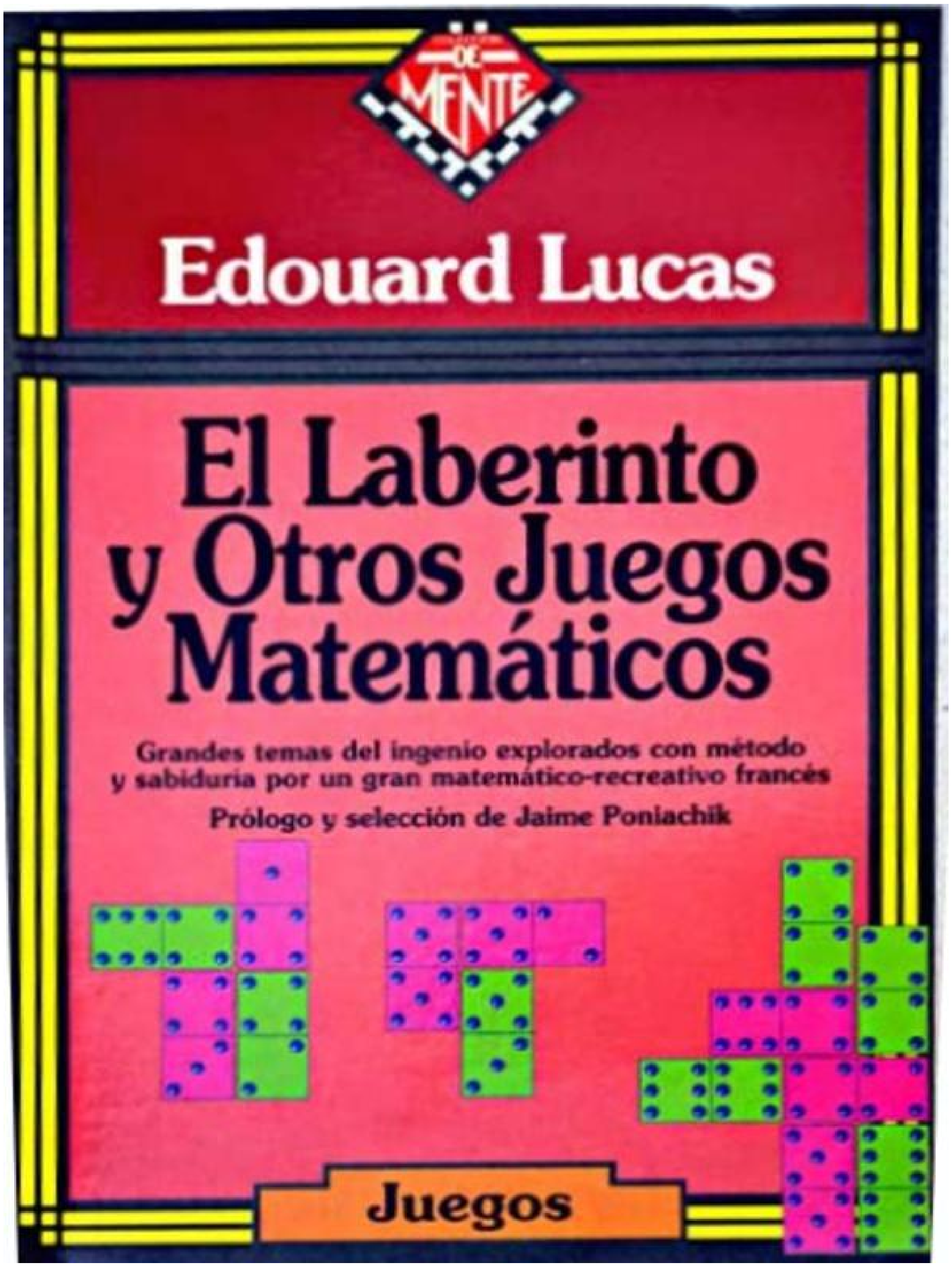

DE MENTE
Edouard Lucas
El Laberinto y Otros Juegos Matemáticos
Grandes temas del ingenio explorados con método y sabiduria por un gran matemático-recreativo francés
Prólogo y selección de Jaime Poniachik
Juegos

Índice

Introducción

Edouard Lucas nació en 1842, en Amiens, al norte de Francia. Después de cursar la Escuela Politécnica y la Escuela Normal fue nombrado en 1864 astrónomo adjunto del Observatorio de Paris. Y luego, profesor de matemáticas especiales en los liceos Saint Louis y Charlemagne. "Aunque fuese un experto en las matemáticas superiores de su época - señala el historiador de la ciencia Eric Temple Bell-, se abstuvo de trabajar sobre los temas de moda en su tiempo para poder dedicarse a la aritmética. Su *Teoría de números* (primera parte, 1891), por desgracia totalmente agotada, es un libro fascinante para los aficionados y los profesionales menos académicos en la teoría de números. Habría que juntar sus escritos y examinar y editar sus manuscritos inéditos. (Hace unos años se ofreció la fantástica suma de treinta mil dólares por los manuscritos de Lucas. En su vida había tenido él tanto dinero.)"

Edouard Lucas cultivó la matemática con entusiasmo. Fue un destacado conferencista, publicó más de doscientas memorias en revistas científicas, estableció una fecunda amistad con muchos matemáticos de su país y del extranjero, fue vicepresidente de la Sociedad Matemática de Francia. En el campo recreativo, Lucas fue el gran animador de su época, autor de artículos y libros, asiduo corresponsal con matemáticos profesionales y con aficionados, inventor de rompecabezas ingeniosos (como la Torre de Hanoi). Siempre se movió con comodidad entre la matemática seria y el juego matemático. La teoría de números, en especial, consiente fácilmente esta ida y vuelta. Veamos algunos casos que tuvieron a Lucas por protagonista.

Un número como el 12 se dice abundante porque la suma de sus divisores propios supera al mismo número

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 6 = 16)$$

Son abundantes también el 18, el 24, el 30. Al ver cómo se van dando estos valores es tentador preguntarse si acaso existirá un abundante *impar*. La pregunta ya se la hacían en la antigua Grecia, y por muchos siglos se creyó que no existía ningún impar abundante. Hasta que en 1509 Charles de Bouvelles dio con el 45045, cuyos divisores suman 59797. Quedaba la duda de si no habría otro menor. Cuatrocientos años después, en 1891, Lucas probó que el 945, cuyos divisores suman 975, es el menor abundante impar.

Un número es primo si sólo admite dos divisores, a 1 y a sí mismo. Son primos

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17,...

Establecer si un número grande, un suponer

170.141.183.460.469.231.731.687.303.715.884.105.727

es o no primo, fue y sigue siendo un asunto arduo. No hay fórmula que zanje rápidamente la cuestión. En 1876, Lucas ideó un procedimiento apropiado, más eficaz que los existentes. Utilizándolo pudo anunciar que el número anterior, que se abrevia como 2^{127}-1, es primo. Fue el mayor primo conocido hasta entonces, ¡Y siguió siéndolo hasta 1951!

Hacia 1949, en los comienzos de las computadoras electrónicas, uno de sus genios creadores, John von Neumann, propuso adaptar el método de Lucas para estas máquinas, con las que se terminó logrando en 1952 el siguiente primo de esa especie, el 2^{521}-1.

En el año 1202, Leonardo de Pisa (conocido por el apodo Fibonacci) resolvió un sencillo problema de procreación de conejos mediante los números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... Cada término, a partir del tercero, es la suma de los dos anteriores. Lucas estudió estos números, descubriéndoles notables propiedades, y bautizó a la secuencia como "sucesión de Fibonacci", A su vez, extendió la idea, y generó los números 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... Siguen la misma ley de formación que los de Fibonacci, salvo que arranca con los términos 1, 3. Esta nueva secuencia se conoce como la "sucesión de Lucas". Ambas han dado origen a una enorme cantidad de investigaciones, donde se entremezcla lo serio con lo recreativo.

El primer libro de Lucas fue *Récréations Mathématiques*; una obra que había proyectado en su juventud y que empezó a publicar en 1882. Lucas retorna allí, y enriquece, los grandes temas de la matemática recreativa, atendiendo a la ilación histórica y a los métodos de resolución. Al tiempo que hace *Récréations*, Lucas encara libros más serios y trabajosos; el ya nombrado sobre teoría de números, y la edición de los escritos dispersos del genio matemático de Toulouse, Pierre de Fermat. Esta concurrencia de libros serios-lúdicos es una especie de reflejo de otra similar que se había dado más de doscientos cincuenta años antes. En 1612, el matemático recreativo Gaspar Bachet publicaba su libro de recreaciones *Problèmes plaisants et délectables*, al tiempo que hacía una edición en latín de la Aritmética del gran matemático el siglo 11, Diofanto.

Es esta edición de Diofanto la que Fermat recorrería, haciéndole anotaciones en los márgenes, y generando apasionante s enigmas matemáticos, uno de los cuales sigue sin resolverse hasta el día de hoy.

Edouard Lucas llegó a publicar dos tomos de *Récréations*. Nuestro libro es una selección de ese material. El 3 de octubre de 1891, tras una corta y terrible enfermedad, Edouard Lucas muere. Sus amigos de la Sociedad Matemática de Francia, Delannoy, Laisant y Lemoine hacen publicar el tercero y el cuarto tomos, que Lucas había dejado casi terminados.

J. P.

Primera recreación
El juego de los cruces en bote

Al almirante de Jonquieres,
miembro del Instituto.

Contenido:

"El principal defecto de muchos sabios es que sólo se entretienen con discursos vagos y trillados, habiendo un campo tan bello para ejercitar el espíritu como el que ofrecen los objetos sólidos y reales, con ventaja para el público. Los cazadores, los pescadores, los comerciantes, los marinos viajeros e incluso los juegos, tanto de habilidad como de azar, proporcionan material como para aumentar considerablemente las ciencias útiles. Hasta en los ejercicios infantiles hay cosas que podrían detener al matemático más grande."
LEIBNIZ, Oper. phil.

1. Historia. Biografía de Bachet

Esta primera recreación contiene la discusión, la rectificación y la generalización de diversos problemas de la antigüedad, que se refieren a la geometría del orden y de la posición. Con respecto al origen de los problemas siguientes, creemos que es desconocido.

Es fácil resolver los cruces en bote usando un mazo de cartas, para el problema de las tres o cuatro parejas; si hay más parejas, se usarán varios mazos. También podemos reemplazar las cartas por fichas numeradas blancas y rojas, o de dos colores cualesquiera. Si leemos atentamente la discusión del problema que ofrecemos más adelante, siguiendo al propio Bachet, aprenderemos rápidamente el funcionamiento de este interesante juego. Bachet es uno de los primeros autores franceses que ha escrito acerca de la aritmética y la geometría de posición; hemos extraído del prefacio de nuestra obra Investigación sobre el análisis indeterminado y la Aritmética de Diofanto (Moulins, 1873), la siguiente noticia biográfica:

GASPAR BACHET, SEÑOR DE MEZIRIAC, nacido en Bourg-en-Bresse, en 1581, y muerto en 1638, fue un geómetra y literato distinguido. Al regreso de un viaje a Italia en compañía del gramático Vaugelas, fue propuesto como preceptor de Louis XIII, pero como no era ambicioso, se marchó precipitadamente de la capital, completamente asustado y diciendo que nunca se había sentido tan apenado, imaginándose ya que llevaba sobre sus hombros toda la pesada carga del reino. De regreso a su ciudad natal, se casó, y por 10 que parece su elección fue afortunada, ya que él mismo reconoció que era lo mejor que había hecho en su vida. En medio de la calma de esa vida interior, descubrió la resolución de la ecuación indeterminada de primer grado con números enteros, publicó dos ediciones sucesivas de Recueil de Problemes plaisants et délectables qui se font par les Nombres, Lyon, 1613 y 1614 (Colección de problemas placenteros y amenos que se hacen con números), y su comentario sobre La Aritmética de Diofanto (Pans. 1621).

2. Cruce de un regimiento

Una compañía de infantería avanza por la margen de un río, pero el puente está roto, el río es profundo. El capitán distingue, en la orilla, a dos niños que Juegan en una pequeña canoa; la embarcación es tan pequeña que sólo puede transportar a un soldado por vez. ¿Cómo se arreglará el capitán para hacer cruzar el río a los soldados de la compañía?

Los dos niños cruzan el río, uno de ellos se queda en la otra orilla y el otro vuelve con el barquito. Después uno de los soldados cruza el río, el niño que quedó en la otra orilla vuelve con el bote.

Con esta táctica, de dos idas y dos vueltas, pasa un soldado. La repetiremos tantas veces como hombres haya en la compañía, incluyendo al capitán y sus tenientes.

3. Cruce del barquero

En la ribera de un río hay un lobo, una cabra y una col; hay un bote tan pequeño que sólo puede cargar al barquero y a uno de ellos. La cuestión es que crucen los tres, de tal modo que el lobo no se coma a la cabra ni la cabra a la col. durante la ausencia del barquero.

El barquero empezará por cruzar la cabra, después volverá a buscar al lobo; cuando haya cruzado al lobo, traerá de vuelta a la cabra y la dejará en la primera orilla, para cruzar la col a la orilla donde está el lobo. Finalmente volverá a cruzar a la cabra. De esa manera, el lobo no quedará a solas con la cabra, ni la cabra con la col en ausencia del barquero.

4. Cruce de las tres parejas

Tres maridos celosos se encuentran con sus esposas en la ribera de un río. y encuentran una embarcación sin barquero; ese bote es tan pequeño que no puede transportar más de dos personas por vez. Se pregunta cómo podrán pasar esas seis personas, de tal manera que ninguna de las mujeres quede en compañía de uno o dos hombres en ausencia de su marido.

Designemos a los maridos celosos con las letras mayúsculas A, B, C. ya sus esposas respectivas con las letras minúsculas correspondientes, a, b. c. Tenemos, en principio:

Primera orilla			*Segunda orilla*		
C	B	A	•	•	•
c	b	a	•	•	•

Operaremos de la siguiente manera, observando que después de cada viaje el bote se amarra a la segunda orilla.

I. Primero pasan dos mujeres:

C	B	A	•	•	•
c	•	•	•	b	a

II. Regresa una mujer y lleva a la tercera:

C	B	A	•	•	•
•	•	•	c	b	a

III. Regresa una mujer, se queda con su marido, y cruzan los otros dos maridos:

C	•	•	•	B	A
c	•	•	•	b	a

IV. Regresa un marido con su esposa, a quien deja, y cruza al otro marido:

•	•	•	C	B	A
c	b	•	•	•	a

V. La mujer de la segunda orilla vuelve a buscar a una de las otras dos:

•	•	•	C	B	A
c	•	•	•	b	a

VI. Una mujer (o el marido) vuelve a buscar a la última:

•	•	•	C	B	A
•	•	•	c	b	a

Si se realiza el juego con cartas o fichas, resultará fácil comprender el razonamiento de Bachet, que aquí reproducimos: “Parecería que esta cuestión no está fundada en razón alguna, pero de todas maneras, la condición de que ninguna mujer debe quedar acompañada por ningún hombre si su marido no está presente, puede llevarnos a encontrar la solución de un modo infalible. Pues es seguro que para cruzar de a dos, es necesario que pasen dos hombres o dos mujeres juntas, o un hombre con su esposa. Así, en el primer cruce, no podemos hacer cruzar a dos hombres (ya que entonces un solo hombre quedaría con las tres mujeres, contradiciendo la condición impuesta); por lo tanto es necesario que crucen dos mujeres, o un hombre con su esposa; pero estas dos posibilidades se convierten en una, ya que si cruzan dos mujeres, es necesario que una de ellas vuelva con el bote; y si cruza un hombre con su esposa, resultará lo mismo, ya que será el hombre quien deberá volver con el bote (pues si fuera la mujer quien volviera, se encontraría con los otros dos hombres en ausencia de su marido).

"En el segundo cruce, no pueden pasar dos hombres, ya que uno de ambos dejaría a su mujer acompañada de otro hombre; tampoco puede cruzar un hombre con su esposa (pues, tras haber cruzado, se encontraría solo con dos mujeres), por lo que es necesario que crucen dos mujeres; de este modo habrán pasado las tres mujeres, y será necesario que una de ellas regrese con el bote. Hecho esto, en el tercer cruce quedan por cruzar los tres hombres y una mujer y es evidente que no pueden cruzar dos mujeres, ya que sólo queda una; tampoco puede pasar un hombre con su esposa (pues si cruza se encontrará solo con las tres mujeres); así, es necesario que sean dos hombres los que crucen y se reúnan en la otra orilla con sus dos esposas, dejando al otro hombre con la suya. Ahora, ¿quién volverá con el bote?

"Un hombre no puede hacerla (porque dejaría a su esposa acompañada por otro hombre); una mujer (o dos mujeres) tampoco (ya que iría hacia otro hombre, dejando a su marido); si volvieran los dos hombres de nada serviría, pues volverían a estar como habían estado. Así, no habiendo otra opción, es necesario que un hombre vuelva en el bote con su esposa.

"En el cuarto cruce, cuando quedan por cruzar dos hombres con sus respectivas esposas, es seguro que no debe cruzar un hombre con su esposa (pues sería lo mismo que nada); tampoco pueden pasar las dos mujeres (pues en ese caso las tres mujeres quedarían con un solo hombre); por lo tanto, es necesario que crucen los dos hombres. Ahora bien, para traer de vuelta el bote no pueden utilizarse dos hombres (ya que eso sería que regresaran al punto de partida); tampoco puede hacerla un hombre solo (pues si lo hiciera se encontraría a solas con dos mujeres); es entonces obligatorio que sea la mujer quien, en dos veces, vaya a buscar a las otras dos que todavía deben cruzar, y ésos son el quinto y el sexto cruces. Es decir que, en seis cruces, todos pueden llegar a la otra orilla sin transgredir la condición impuesta"[1].

El razonamiento precedente nos demuestra que el problema planteado tiene una única solución con seis cruces como óptimo.

5. El error de Tartaglia

Tartaglia, un ilustre matemático italiano, nació en Brescia alrededor de 1510, y murió en 1557. Antes que Pascal, planteó la teoría del triángulo aritmético, y antes que Cardano, la resolución de la ecuación de tercer grado. En su Tratado de Aritmética, se propuso resolver el problema para cuatro parejas, conservando las condiciones del enunciado precedente; pero este gran sabio se equivocó, Bachet, que lo señaló, ha reconocido que la cosa es imposible, pero sin ofrecer demostración alguna.

He aquí cómo podemos demostrar la imposibilidad de este problema, si no podemos hacer cruzar a más de dos personas por vez. Observaremos ante todo que de un cruce al siguiente, el número de personas que han cruzado, si es que aumenta, sólo puede hacerla de a una unidad. En consecuencia, supongamos que hemos hecho pasar dos, después tres, después cuatro personas respetando las condiciones impuestas, y veamos si podemos hacer cruzar cinco personas. Esas cinco personas pueden ser:

4 mujeres	3 mujeres	2 mujeres	1 mujer
1 hombre	2 hombres	3 hombres	4 hombres

Pero los dos primeros casos son imposibles, si se atiende al enunciado, ya que en la segunda orilla estarían en mayoría las mujeres y, en consecuencia, habría alguna que se encontraría en compañía de un hombre en ausencia de su marido; del mismo modo, el tercer caso es imposible, ya que en la primera orilla las mujeres

[1] Bachet, *Problemes plaisants et déleetables qui se Jont par les Nombres*. Cuarta edición revisada, simplificada y aumentada por A Labosne, París, Gauthier-Villars, 1879, pp. 148-150.

seguirían estando en mayoría con respecto a los hombres presentes.

En cuanto al último caso, si es que puede producirse, es porque el último cruce ha trasladado a dos hombres, o a un hombre y una mujer. Pero no pueden haberse trasladado dos hombres, pues entonces habrían estado en la primera orilla dos hombres y tres mujeres, lo que es tan imposible como en el segundo caso; tampoco podrían haber cruzado un hombre y una mujer, ya que en la primera orilla habrían estado un hombre y cuatro mujeres, lo que es tan imposible como en el primer caso.

Así, no podemos hacer cruzar a cinco personas, como consecuencia de las exigencias del enunciado del problema.

6. Cruce de las cuatro parejas

Sin embargo, puede llevarse a cabo el cruce de cuatro parejas si el bote puede trasladar a tres personas por vez. En ese caso se respetan las otras condiciones impuestas, tal como lo ha demostrado Labosne.

Designemos a los maridos o a los reyes de los cuatro palos del mazo de naipes con las letras mayúsculas A, B, C, D, y a las mujeres o a las remas respectivas, con las letras minúsculas correspondientes a, b, c, d. Así tenemos, en el momento de la partida:

Primera orilla				*Segunda orilla*			
D	C	B	A	•	•	•	•
d	c	b	a	•	•	•	•

Admitiendo que la embarcación puede trasladar hasta tres personas, operaremos según la tabla siguiente:

I. Primero pasan tres reinas:

D	C	B	A	•	•	•	•
d	•	•	•	•	c	b	a

II. Una reina (o dos) regresa y lleva a la cuarta:

D	C	B	A		•	•	•	•
•	•	•	•		d	c	b	a

III. Vuelve una rema, se queda con su marido; cruzan los otros tres reyes:

D	•	•	•		•	C	B	A
d	•	•	•		•	c	b	a

IV. Vuelve un rey con su esposa y lleva al otro rey:

D	C	B	A		•	•	•	•
•	•	•	•		d	c	b	a

V. Finalmente, el último rey vuelve a buscar a su esposa:

D	•	•	•		•	C	B	A
d	•	•	•		•	c	b	a

7. Problema general del cruce

Siguiendo la misma vía, se generaliza el problema precedente, que podemos enunciar así:

Un número cualquiera n de maridos se halla con sus esposas en una orilla del no que desean cruzar y ven una embarcación sin barquero; esa embarcación no puede llevar más de (n-l) personas. Se pregunta cómo cruzarán esas 2n personas de tal manera que ninguna mujer quede en compañía de uno o varios hombres si su marido no está presente.

Para solucionar este problema, supondremos que hay más de cuatro parejas; designaremos

a los maridos con las letras	M	L	——	B	A,
y a sus mujeres con las letras	m	l	——	b	a

a los maridos con las letras M y a sus mujeres con las letras m; los dos trazos horizontales representan a una o varias parejas, en cualquier número.

Tenemos, en un principio:

Primera orilla					*Segunda orilla*				
M	*L*	_____	*B*	*A*	•	•	••••	•	•
m	*l*	_____	*b*	*a*	•	•	••••	•	•

Operaremos según la tabla siguiente:

I. Primero pasan (n - 1) mujeres:

Primera orilla					*Segunda orilla*				
M	*L*	_____	*B*	*A*	•	•	••••	•	•
m	•	_____	•	•	•	*l*	••••	*b*	*a*

II. Una mujer vuelve a buscar a la última:

Primera orilla					*Segunda orilla*				
M	*L*	_____	*B*	*A*	•	•	••••	•	•
•	•	••••	•	•	*m*	*l*	_____	*b*	*a*

III. Vuelve una mujer, se queda con su marido, y cruzan los otros maridos:

Primera orilla					*Segunda orilla*				
M	•	••••	•	•	•	*L*	_____	*B*	*A*
m	•	••••	•	•	•	*l*	_____	*b*	*a*

IV. Una pareja vuelve a cruzar el río y lleva a la pareja restante:

Primera orilla					*Segunda orilla*				
•	•	••••	•	•	*M*	*L*	_____	*B*	*A*
•	•	••••	•	•	*m*	*l*	_____	*b*	*a*

El cruce se lleva a cabo en cuatro viajes, en tanto que para cuatro parejas son necesarios cinco viajes; en este caso, el último viaje se desdobla; ya que quedan cuatro personas en la primera orilla después del tercer cruce.

8. Otra generalización del problema

El enunciado general precedente fue propuesto por Labosne, quien ofreció una solución de este problema en su edición de Problemes de Bachet de Méziriac. Pero la solución que acabamos de exponer es mucho más simple que la del editor.

Por otra parte, observaremos aquí que esa generalización no nos parece completa; no concuerda del todo con la idea contenida en el enunciado del problema de los tres maridos celosos. A partir de la tabla precedente, vemos que es posible hacer cruzar a nueve parejas en una embarcación con capacidad para ocho personas. Sin embargo, es posible advertir que este cruce puede llevarse a cabo en una embarcación que lleve dos personas menos, es decir, con capacidad máxima de seis. En efecto, en la solución del problema de las tres parejas, cada una de ellas puede considerarse triple, y el cruce podrá efectuarse de conformidad con la primera tabla que hemos mostrado, suponiendo que Aa, Bb Y Cc representan parejas triples.

En consecuencia, el enunciado general del problema del cruce de n parejas es el siguiente:

Un número cualquiera n de maridos se hallan con sus esposas en una orilla del río que desean cruzar: ¿cuál será el número más pequeño x de personas que una embarcación puede llevar como máximo para efectuar el cruce, sin barquero, respetando la condición de que ninguna mujer debe quedar en el bote ni en ninguna de ambas orillas en compañía de uno o más hombres si su esposo no está presente?

Daremos la solución de este problema en la nota 1, al final de este capítulo.

9. La escala en una isla

Agregaremos, para terminar esta recreación, que hay otra manera de generalizar el problema de los maridos celosos por medio de un método muy simple e ingenioso, cuya idea nos fue sugerida en el Congreso de la Asociación francesa para el progreso de las ciencias, realizado en Montpellier en 1879, por un joven alumno del liceo de esa ciudad, el señor de Fontenay. En efecto, basta con suponer que, durante la travesía, podemos detenernos en una isla; en tal caso, y respetando todas las otras condiciones del primer problema, podemos llevar a cabo con una embarcación, que albergue como máximo a dos personas, el cruce de un número cualquiera de parejas. En otras palabras, daremos la solución completa del siguiente problema:

Un número cualquiera de maridos se hallan con sus esposas en una orilla del río que desean cruzar. Encuentran una embarcación tan pequeña que no puede llevar a más de dos personas; además, el río tiene una isla en la que es posible detenerse. Preguntamos cómo harán esas personas para cruzar el río de tal manera que ninguna mujer se quede, ya sea en cualquiera de ambas orillas, en la embarcación o en la isla, en compañía de uno o más hombres si su marido no está presente.

Supondremos en principio que el número de maridos es por lo menos igual a cuatro.

El cruce se compondrá siempre de tres fases distintas.

FASE DE PARTIDA. En esta primera parte, nos ocupamos de hacer cruzar a una pareja a la segunda orilla y a otra hasta la isla; logramos ese resultado gracias a cinco viajes; después de cada uno de ellos, la embarcación queda amarrada en la isla.

Los dos trazos horizontales representan entonces a una o varias parejas.

I. Dos mujeres cruzan a la isla:

_____	*D*	*C*	*B*	*A*	•	•	•	•	•	•	•	•
_____	*d*	*c*	•	•	•	•	*b*	*a*	•	•	•	•

II. Una de ellas vuelve a buscar a la tercera:

_____	*D*	*C*	*B*	*A*	•	•	•	•	•	•	•	•
_____	*d*	•	•	•	•	c	*b*	*a*	•	•	•	•

III. Una mujer vuelve, se queda con su marido, y dos maridos se reúnen con sus esposas:

_____	*D*	*C*	•	•	•	•	*B*	*A*	•	•	•	•
_____	*d*	•	•	•	•	•	*b*	*a*	•	•	•	•

IV. Las mujeres que están en la isla cruzan a la segunda orilla, y una de ellas regresa a la isla:

_____	*D*	*C*	•	•	•	•	*B*	*A*	•	•	•	•
_____	*d*	•	•	•	•	•	•	*a*	•	•	•	*a*

V. Los hombres que están en la isla cruzan a la segunda orilla y uno de ellos regresa a la isla con su mujer:

_____	*D*	*C*	•	•	•	•	*B*	•	•	•	•	*A*
_____	*d*	*c*	•	•	•	•	•	•	•	•	•	*a*

FASE INTERMEDIA. Aquí nos ocuparemos de:

1. ir a buscar a una pareja a la primera orilla para llevada a la isla;
2. hacer cruzar a una pareja de la isla a la segunda orilla, quedando la embarcación siempre amarrada en la isla después de cada viaje; esta fase comprende cuatro viajes.

I. El hombre de la isla vuelve a la isla y dos mujeres se van a la isla:

_____	*D*	*C*	*B*	•	•	•	•	•	•	•	•	*A*
_____	*d*	*c*	•	•	*d*	*c*	*b*	•	•	•	•	*a*

II. Una mujer regresa y se queda con su marido, y los otros dos maridos se reúnen con sus mujeres en la isla:

_____	*D*	•	•	•	•	C	B	•	•	•	•	*A*
_____	*d*	•	•	•	•	*c*	*b*	•	•	•	•	*a*

III. Los dos maridos cruzan hasta la segunda orilla, y la mujer regresa a la isla:

_____	*D*	•	•	•	•	•	•	•	•	*C*	*B*	*A*
_____	*d*	•	•	•	•	*c*	*b*	*a*	•	•	•	•

IV. Dos mujeres cruzan desde la isla a la segunda orilla, y el marido C regresa a la isla:

_____	*D*	•	•	•	•	*C*	•	•	•		*B*	*A*
_____	*d*	•	•	•	•	*c*	•		•	•	*b*	*a*

Esta fase intermedia se repetirá hasta el momento en que no quede más que una pareja en la primera orilla.

ULTIMA FASE. Nos ocuparemos de cruzar hasta la segunda orilla a la pareja que queda en la primera orilla y a la que ha quedado en la isla. Son necesarios tres viajes, de los cuales el último se cuenta como uno.

I. El hombre de la isla va a buscar al último marido:

•	•	•	•	*D*	*C*	•	•	•	•	*B*	*A*	_____
d	•	•	•	•	*c*	•	•	•	•	*b*	*a*	_____

II. Los hombres de la isla cruzan a la segunda orilla, y una mujer vuelve a la isla:

•	•	•	•	•	•	•	•	*D*	*C*	*B*	*A*	_____
d	•	•	•	•	*c*	*b*	•	•	•	•	*a*	_____

III. Las mujeres de la isla pasan a la segunda orilla, y una de ellas vuelve a buscar a la última mujer:

•	•	•	•	•	•	•	•	*D*	*C*	*B*	*A*	_____
•	•	•	•	•	•	•	•	*d*	*c*	*b*	*a*	_____

Entonces, si no hay más que cuatro parejas, el cruce se efectúa en doce viajes, y si hay n parejas, el cruce se efectúa en un número de viajes que es igual, como máximo, a 4(n - 1).

10. Nota sobre el juego de los cruces

Hemos ofrecido el enunciado de un problema general del cruce. He aquí la solución muy simple que nos fue enviada por el señor Delannoy, ex alumno de la Escuela Politécnica. Hay dos casos para examinar, según si el barco puede contener cuatro personas o menos de cuatro. En el primer caso, hacemos pasar dos parejas a la vez, y una de ellas regresa a buscar a otro matrimonio. Repitiendo esta maniobra, las n parejas cruzarán el río en n viajes.

En el caso de que la embarcación no pueda trasladar a dos parejas, el número x de personas que la embarcación puede contener como máximo será 2 o 3. Así, estamos obligados a comenzar por hacer cruzar un cierto número de mujeres, o bien una sola pareja, a los efectos de satisfacer la condición de no dejar a ninguna dama sola en ausencia de su marido y con otros hombres. Demostraremos, como ya lo hicimos, que no se puede hacer cruzar a 6 parejas en una embarcación que albergue menos de cuatro personas. Queda por tanto ofrecer la tabla del cruce de las cinco parejas en una embarcación con capacidad para tres personas.

Tenemos, en el momento de la partida:

Primera orilla					*Segunda orilla*				
E	*D*	*C*	*B*	*A*	•	•	•	•	•
e	*d*	*c*	*b*	*a*	•	•	•	•	•

I. Primero cruzan tres mujeres

E	*D*	*C*	*B*	*A*	•	•	•	•	•
e	*d*	•	•	•	•	•	*c*	*b*	*a*

II. Una mujer (o dos) regresa y busca a la cuarta:

E	*D*	*C*	*B*	*A*	•	•	•	•	•
e	•	•	•	•	•	*d*	*c*	*b*	*a*

III. Una mujer regresa y tres maridos se reúnen con sus esposas:

E	*D*	•	•	•	•	•	*C*	*B*	*A*
e	*d*	•	•	•	•	•	*c*	*b*	*a*

IV. Vuelve una pareja y cruzan tres maridos:

•	•	•	•	•	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
e	*d*	*c*	•	•	•	•	*c*	*b*	*a*

V y VI. Una mujer regresa a buscar sucesivamente a las tres últimas mujeres:

•	•	•	•	•	*E*	*D*	*C*	*B*	*A*
•	•	•	•	•	*e*	*d*	*c*	*b*	*a*

En resumen, designando por medio de n el número de parejas, por x el número de personas que una embarcación puede contener como máximo y por N el número de viajes, tenemos la tabla que sigue:

$n = 2$	$x = 2$	$N = 3$
$n = 3$	$x = 2$	$N = 6$
$n = 4$	$x = 3$	$N = 5$
$n = 5$	$x = 3$	$N = 6$
$n > 5$	$x = 4$	$N = n$

Segunda recreación
El juego de los laberintos

Al príncipe Camille de Polignac, vicepresidente de la Sociedad Matemática de Francia.

"Es raro que los geómetras sean exquisitos, y que los exquisitos sean geómetras."

PASCAL, Pensamientos

"Ese espíritu filosófico que debe dominar en todo, y que es el hilo de todos los laberintos."

VOLTAIRE, Elogio de la marquesa de Châtelet

"Los hombres de espíritu no son raros, y los geómetras sí lo son."

CASANOVA DE SEINGALT, Solución del problema délico

Contenido:

1. Pulgarcito. El hilo de Ariadna

Lector, imagínate extraviado en las encrucijadas de un laberinto, en las galerías de una mina, en los pasadizos de las catacumbas, en las umbrosas avenidas de un bosque. No tienes a mano nada parecido al *Hilo de Ariadna*, y te encuentras en la misma situación de *Pulgarcito* después de que los pájaros se comieran las miguitas de pan con las que había señalado su camino. ¿Cómo hacer para encontrar la salida del laberinto, la boca de la mina, la entrada de las catacumbas, la cabaña del leñador? Esta recreación te enseñará que siempre es posible reencontrar la senda perdida.

2. Los laberintos de Egipto y de Grecia

Los autores antiguos consideraban que los laberintos eran inextricables, y es posible que ese prejuicio persista en nuestros días. Damos ese nombre a los edificios compuestos por paseos o galerías cuyas innumerables ramificaciones hacen que el visitante se vea imposibilitado de salir. Las obras de la antigüedad están repletas de descripciones de esos monumentos maravillosos que servían de tumbas y de los que hoy no quedan más que ruinas. En Egipto había dos: el *laberinto de Mendès*, situado en la isla del lago Moeris, y el de los *Doce Señores*, construido al sudeste del mismo lago por Psamético, casi siete siglos antes de la era cristiana. Plinio cuenta que era un monumento consagrado al sol; se componía de una serie de templos unidos o superpuestos entre sí que ocupaban una extensión prodigiosa; las calles describían circuitos y vericuetos inextricables.

Pero, entre todos esos monumentos, el más cantado por los poetas ha sido el *laberinto de Creta*, construido por orden del rey Minos como prisión para el Minotauro:

Minos quiso que la sombra de un vasto laberinto
Morada fuera y prisión del monstruo pavoroso.
El ingeniero Dédalo, arquitecto famoso
Trazó los cimientos de sus muros sinuosos
Y en los largos rodeos, sin fin y sin salida
El error de los sentidos confundía la vista.
Quien prefiera seguir un camino tortuoso
Hallará que el meandro ha tornado su curso inseguro,
Los mismos pasos que rigen su marcha
Harán que mil veces retorne al principio,

De rodeo en rodeo perdida su ruta
En cada circuito ideado por Dédalo.
Así el laberinto, del que el propio creador
Emergía con esfuerzo... la tal punto era su arte mayor!
(OVIDIO, Metamorfosis, libro VIII)

La idea de la inextricabilidad aparece en ese pasaje de Ovidio, cuya traducción posee al menos el mérito de ofrecer, a partir del número de epítetos, una imagen de la multiplicidad de encrucijadas del laberinto. Volvemos a encontrar esta idea en las Cartas a Emilia de Demoustier: "Este edificio inmenso", dice, "contenía una infinidad de circuitos diseñados con pérfida intención:

¡Ay! al corazón de la infiel se parecía
Donde la inocencia ignora los desvíos;
Uno como ella, sin saberlo se metía
y como ella para siempre se perdía.

Puede ser que no haya en todo esto nada más que una leyenda poética; ningún autor de la antigüedad refiere haber visto ese laberinto; desde el tiempo de Diodoro y de Plinio no se han descubierto más vestigios exteriores. Sin embargo existen todavía en la isla de Creta numerosas cavernas con galerías cubiertas que los pobladores no dudan en calificar como las ruinas del laberinto donde entrara la bella Ariadna, hija de Minos.

3. Tournefort en una caverna

El célebre botánico Tournefort visitó, alrededor de 1702, una de esas cavernas, situada al pie del monte Ida. En sus cartas dirigidas al ministro Pontchartrain, publicadas con el título de *Voyage du Levant*, cuenta que después de haber deambulado durante cierto tiempo por una red de corredores subterráneos, los exploradores llegaron a una larga y amplia avenida que los condujo a una sala muy bella, situada al fondo del laberinto. “En una media hora, más o menos", relata, "adelantamos 1.460 pasos por esa avenida principal sin desviamos ni a derecha ni a izquierda. Tiene una altura de siete pies, y está revestida de una capa horizontal de piedras planas, tal como son la mayoría de los lechos de piedra en esa región. Sin embargo, hay algunos tramos en que nos vimos obligados a agachar la cabeza, y un tramo, entre ellos, que se hallaba a mitad del camino, donde nos vimos forzados, como se dice, a *caminar en cuatro patas*.

Esta avenida es casi siempre suficientemente ancha como para dejar pasar a dos o tres personas lado a lado. El suelo es llano: no es necesario subir ni bajar de ninguna manera considerable. Los muros están tallados a plomo. o hechos con piedras que abundan en el camino y que alguien se tomó el trabajo de alinear perfectamente, como se hace en esa clase de muros en los que no se emplea cemento; pero se abren tantos caminos a ambos lados que uno se perdería indudablemente si no tomara las precauciones necesarias. Como sentíamos grandes deseos de regresar, tomamos las siguientes precauciones:

1. *Dejamos a uno de nuestros guías a la entrada de la caverna, con la orden de ir a buscar gente de la aldea próxima para que viniera a liberamos si es que no regresábamos antes de la noche;*
2. *Cada uno de nosotros llevaba una antorcha en la mano;*
3. *Dejamos papeles numerados a la derecha de todos los desvíos que nos parecieron difíciles de volver a tomar;*
4. *Uno de nuestros griegos dejaba del lado izquierdo pequeñas ramas de espino que había acumulado y otro se ocupaba de sembrar el camino con paja que llevaba en una bolsa.”*

4. Los otros laberintos

Existen además numerosas ruinas de otros laberintos: en Lemos. Agrigento, Clusio. Sobre este último edificio, que sirvió de tumba a Porsenna, tenemos el testimonio de Marcus Varron, citado por Plinio: su base contenía un laberinto inextricable; si alguien penetraba en él sin un ovillo de hilo, no podía volver a la salida. Este edificio, agrega Plinio, era un monumento a la locura y la vanidad humana.

En la Edad Media, el laberinto se trasladó a la disposición particular de las baldosas de las iglesias góticas. La disposición, el corte y el color de los mosaicos forman, por medio de sus combinaciones, líneas sinuosas que conducen, por medio de numerosos desvíos, a las diferentes estaciones, y finalmente a un calvario figurado.

Entre los más famosos laberintos de esta clase, sobre los que se efectúan peregrinajes en miniatura, debemos citar los de las catedrales de Amiens, de Sens, de Reims, de Chartres y de Bayeux. En estos dos últimos todavía subsisten, así como en la iglesia colegial de Saint -Quentin.

Actualmente todavía tenemos en París dos laberintos, sin contar el dédalo de nuestras calles, bulevares y callejones: el de las antiguas canteras, sobre la orilla izquierda del Sena, y el del Jardín Botánico. Con una autorización especial, el público puede visitar la parte del primero que se llama *Osario de las Catacumbas*, y que contiene los restos de las sepulturas de antiguos cementerios. Es imposible extraviarse allí, porque los visitantes, a quienes se cuenta a la entrada y a la salida, marchan en procesión, guiados por una larga cadena negra, una especie de hilo de Ariadna, que el humo de las bujías ha marcado sobre la bóveda.

En cuanto al *laberinto del Jardín Botánico*, es en los días de sol lugar de reunión de los niños, que corren y se ocultan en las avenidas circulares flanqueadas de abetos y pedruscos, a la sombra de los altos cedros.

5. Definición geométrica del problema de los laberintos

Podemos considerar las encrucijadas de un laberinto como puntos geométricos; las avenidas, corredores, calles, galerías, como líneas rectas o curvas, planas o alabeadas, que reúnen esos puntos de dos en dos. Diremos que esos puntos y esas líneas forman una red geométrica o un laberinto cuando un punto móvil colocado en una de esas líneas de la red puede pasar a cualquier otro punto sin abandonar las líneas del sistema. Dicho esto, demostraremos que ese punto móvil puede describir o trazar sucesivamente todas las líneas de la red sin saltos bruscos y sin pasar más de dos veces sobre cada una de ellas. En otras palabras, *un laberinto no es nunca inextricable*.

Realizaremos un juego de la siguiente manera: elegiremos arbitrariamente sobre una hoja de papel en blanco un número cualquiera de puntos; los uniremos de dos en dos y tantas veces como se desee, por medio de un número cualquiera de líneas, rectas o curvas, de manera tal que ningún punto del sistema quede aislado de los otros: de esa manera tendremos una red geométrica. Dibujemos, por ejemplo, la red de líneas de ómnibus y tranvías de una gran ciudad, la red de líneas férreas de un país, la red fluvial de ríos y canales de un país cualquiera agregando, a voluntad, las costas y las fronteras.

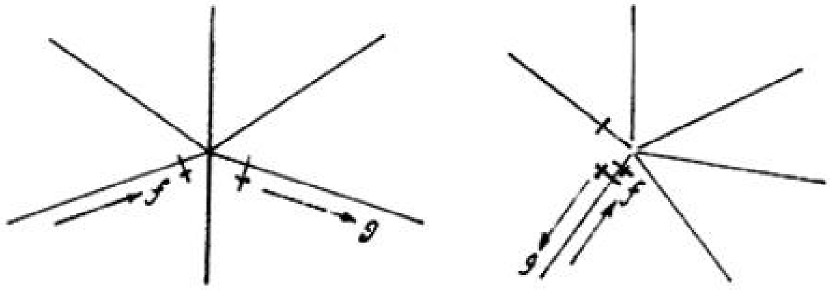
Cubriremos el dibujo con una hoja de cartón opaco de manera de no conservar el recuerdo del plano del laberinto; esta hoja de cartón tiene un agujero, al que llamaremos ocular, que solamente nos permite percibir una pequeña fracción de la red. Desplazaremos este cartón o pantalla de tal manera que el ocular se sitúe sobre una encrucijada A. Se tratará entonces de hacer que el ocular recorra dos veces todas las líneas de la red, de una manera continua, para volver luego al punto de partida A. Para conservar el recuerdo del pasaje del ocular por cada uno de los caminos que recorre, trazaremos sobre cada línea recorrida un pequeño trazo transversal, a la entrada ya la salida de las encrucijadas. En consecuencia, las dos extremidades de cada camino, después de las peregrinaciones del viaje, deberán quedar marcadas dos veces, pero no más.

En un laberinto real, o en las galerías de una mina, el viajero extraviado dejará una marca a la entrada y a la salida de cada encrucijada, en la senda que acaba de abandonar y en la que está a punto de tomar.

6. La solución de Tremaux

Entre las numerosas soluciones de este curioso problema de la geometría de posición cuyo enunciado acabamos de ofrecer, elegiremos, como la más simple y elegante, la que nos ha sido transmitida por el señor Trémaux, ex alumno de la Escuela Politécnica, ingeniero de telégrafos. Hemos modificado ligeramente la demostración.

PRIMERA REGLA. Partiendo de la encrucijada inicial, seguimos una vía cualquiera hasta llegar a un callejón sin salida o a otra encrucijada: 1 º) Si el camino que hemos seguido no tiene salida, volvemos sobre nuestros pasos, y podemos eliminar el camino recorrido ya que ha sido recorrido dos veces; 2º) Si el camino desemboca en una encrucijada, se toma una vía cualquiera al azar, teniendo cuidado de marcar con trazo transversal la vía de llegada en el sentido de la flecha *f*, y la vía de partida en el sentido de la flecha *g* (fig. 1).



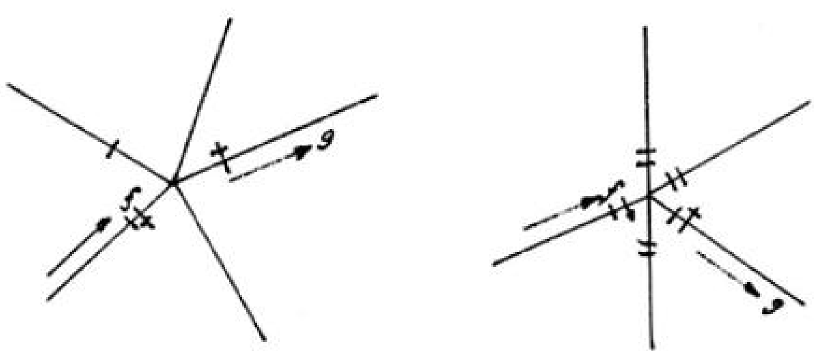
Figuras 1 y 2

En esta figura y en las tres siguientes, hemos distinguido las marcas viejas de las nuevas, adicionando a éstas una crucecita.

Seguimos aplicando la primera regla cada vez que llegamos a una encrucijada inexplorada; al cabo de un cierto recorrido, necesariamente llegaremos a una encrucijada ya explorada, pero esta situación puede presentarse de dos maneras diferentes, según si el camino de llegada ya fue seguido una primera vez o si no tiene todavía ninguna marca de pasaje. Entonces aplicamos una de las dos reglas siguientes:

SEGUNDA REGLA. Al llegar a una encrucijada ya explorada, por una nueva vía, debemos retroceder marcando con dos trazos la llegada y la partida de esa encrucijada, tal como se aprecia en la fig. 2.

TERCERA REGLA. Cuando llegamos a una encrucijada ya explorada, por una vía ya recorrida, en principio tomaremos una vía que no haya sido recorrida, si es que existe, o ante su falta, una vía que sólo haya sido recorrida una vez; esos dos casos se representan en las figuras 3 y 4.



Figuras 3 y 4

DEMOSTRACION. Si se ejecuta rigurosamente la aplicación de las reglas precedentes, necesariamente recorreremos dos veces todas las líneas de la red. Por empezar haremos las siguientes observaciones:

I. Al partir de la encrucijada A. hacemos allí una sola marca inicial.

II. El pasaje por una encrucijada agrega, gracias al empleo de una de las tres reglas, dos marcas a las líneas que convergen en esa encrucijada.

III. En cualquier momento de la exploración del laberinto, antes de llegar a una encrucijada o después de dejarla atrás, la encrucijada inicial contiene un número impar de marcas, y todas las otras encrucijadas un número par.

IV. En cualquier momento de la exploración, antes o después del pasaje por una encrucijada, la encrucijada inicial puede tener a lo sumo un camino con una sola marca; toda otra encrucijada explorada puede tener a lo sumo dos caminos con una sola marca.

V. Después de completar la exploración, todas las encrucijadas deben estar cubiertas con dos marcas por cada camino; ésa es la condición que impone el enunciado.

Dicho esto, es sencillo advertir que, cuando el viajero llega a una encrucijada M, diferente de la encrucijada inicial A, las dificultades del problema no pueden detener su curso. En efecto, no es posible que llegue a esa encrucijada M más que por una vía nueva o por una vía recorrida una sola vez. En el primer caso, aplicamos la primera o la segunda regla; en el segundo caso, la entrada a la encrucijada produce un número *impar* de marcas; entonces queda, según la nota III, a falta de una vía nueva, una línea que sólo tiene una marca.

De este modo, el viajero no puede ser detenido a menos que vuelva a la encrucijada inicial A. Sea ZA el camino que conduce a su detención forzada, viniendo de la encrucijada Z; este camino es necesariamente un camino ya recorrido una primera vez, pues de no ser así podría continuar el viaje. Ya que el camino ZA ha sido recorrido antes, no existe en la encrucijada Z ninguna vía que no haya sido ya recorrida, pues en otro caso nos habríamos olvidado de aplicar el primer caso de la regla tercera; por otra parte, habría además de ZA una y sólo una vía, YZ, recorrida una sola vez según la nota IV. En consecuencia, en el momento de la detención en A, todas las rutas de la encrucijada Z han sido recorridas dos veces; asimismo todas las vías de la encrucijada precedente Y han sido recorridas dos veces, al igual que las de las otras encrucijadas. Eso es lo que había que demostrar.

NOTA: Se puede reemplazar la segunda regla por la siguiente cuando no se trata de una encrucijada cerrada. Si llegamos por una vía nueva a una encrucijada ya explorada, podemos tomar una nueva vía, con la condición de agregar en las dos marcas de pasaje por esa encrucijada los índices *a* y *a'*; entonces, si retornamos a la encrucijada por una de esas dos vías, deberemos retomar la otra. Esto equivale, por así decirlo, a colocar un puente *aa'* sobre la encrucijada. Esta regla nos fue indicada por el señor Maurice, ex alumno de la Escuela Politécnica.

7. Sobre la teoría de los árboles geométricos

Hemos visto que, en la aplicación de la segunda regla, debemos retroceder cuando llegamos por una nueva vía a una encrucijada ya explorada. Supongamos que suprimimos, en la red, un pequeño fragmento del camino que conduce a esa encrucijada, y que hacemos la misma operación en todos los lugares de retroceso; la red se transforma entonces en otra figura geométrica que designamos indistintamente con el nombre de *árbol ramificación o arborescencia*. Los caminos toman el nombre de ramas o ramales, y las encrucijadas el de ramificaciones o nudos. Configuraciones semejantes fueron estudiadas por Jordan, Sylvester, Cayley, Septimus Tebay y, más recientemente, por el príncipe C. de Polignac.

Habitualmente damos la siguiente definición de árbol geométrico: desde cada nudo, siguiendo las ramas, se puede llegar a un nudo cualquiera, pero por un solo camino. Esta teoría fue considerablemente simplificada por Polignac gracias a una propiedad fundamental. En efecto, todo árbol puede dibujarse por medio de cierto número de trazos continuos, sin repetición ni interrupción, es decir partiendo desde el extremo de una rama y continuando hasta detenerse en el extremo de otra rama o hasta detenerse junto a una rama ya recorrida. Observemos que el trazo debe cruzar una línea ya dibujada antes, si puede ir más allá, sin repasar esta línea. Dicho lo cual:

PROPIEDAD FUNDAMENTAL. *De cualquier manera que se dibuje un árbol sin repetición ni interrupción, el número de trazos será siempre el mismo.*

En efecto, si hacemos un corte en todas las ramas que unen dos nudos, descompondremos el árbol en una serie de estrellas. Recompondremos el árbol restituyendo a las estrellas sus rayos comunes. Para cada estrella, tomada por separado, la propiedad fundamental es evidente. Designamos como N_1, N_2, N_3,... N_p, el número de trazos correspondientes a cada estrella; y por *p* el número de nudos o estrellas. Si unimos ahora las dos primeras estrellas, perdemos un trazo con respecto a la suma de trazos correspondientes a cada estrella; al unir la segunda estrella a la tercera, perdemos otro trazo. En consecuencia, si designamos con N el número de trazos requeridos para dibujar el árbol, tenemos:

$$N = N_1 + N_2 + N_3 + \ldots + N_p - (p-1)$$

Llamaremos al número N, base del árbol; podemos expresar los números N_1, N_2,..., y en consecuencia el mismo número N por el orden del nudo o estrella, es decir por el número de ramas o de rayos que allí convergen. El nudo más simple es el temario o de orden 3; sea, en general, m_q el orden de un nudo *q*; en principio m es al menos igual a tres; el número N_q de trazos que permiten dibujar ese nudo es igual a la mitad de m_q, si m_q es par, y a la mitad de m_{q+1} cuando m_q es impar; así, en todos los casos, es el número entero más grande contenido en la fracción

$$(½)(m_q + 1)$$

Habitualmente, ese número se representa por el símbolo:

$$\frac{m_q + 1}{2}$$

En consecuencia, la fórmula precedente puede escribirse:

$$N = \left(\frac{m_1 + 1}{2}\right) + \left(\frac{m_2 + 1}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{m_q + 1}{2}\right) - (p-1)$$

De este modo se determina la base del árbol conociendo el número y el orden de los nudos.

Designemos con *l* al número de extremidades libres de las ramas y supongamos que el árbol sólo tiene nudos de orden ternario; tenemos entonces, cualquiera sea el número de nudos ternarios, la fórmula:

$$N = l - 1$$

Esta fórmula es evidente para una estrella con tres rayos; si agregamos un nudo temario en el extremo libre de una rama, reemplazamos ésta por otras dos y agregamos un trazo; cuando formamos un nudo ternario por la adición de un ramal a una rama, agregamos un trazo y una extremidad libre. En los dos casos, los dos miembros de la fórmula precedente aumentan en una unidad. Así, esta fórmula es general.

Designemos en general con P_k el número de nudos de orden k; tenemos, en el caso de dos nudos separados de orden cuaternario (P'_4 y P''_4, que aquí son iguales a 1):

$$N' = l' - 1 - p'_4, \; N'' = l'' - 1 - p''_4$$

Al reunir dos nudos cuaternarios por un extremo común, el número total de trazos disminuye en una unidad, pero dos extremidades desaparecen; tenemos entonces:

$$N + 1 = N' + N, \; 1' + l'' = l + 2, \; p'_4 + p''_4 = p'_4$$

Por consiguiente, para el árbol de dos nudos cuaternarios tenemos:

$$N = l - 1 - p_4$$

Esta fórmula se aplica a un árbol formado por un número cualquiera de nudos cuaternarios. Se demostrará análogamente que la base de un árbol que sólo contiene nudos de quinto orden en número P_5. está dada por la fórmula:

$$N = l - 1 - p_5$$

De manera más general, cuando un árbol sólo contiene nudos de orden 2m, tenemos:

$$N = l - 1 - (m - 1)p_{2m}$$

y cuando sólo contiene nudos de orden 2m + 1, tenemos:

$$N = l - 1 - (m - 1)p_{2m+1}$$

En consecuencia, uniendo dos o más árboles por dos extremidades libres, se obtiene la fórmula general:

$$N = l - 1 - (p_4 + p_5) - 2(p_6 + p_7) - 3(p_8 + p_9) - 4(p_{10} + p_{11}) - \ldots$$

Tercera recreación
El problema de las ocho damas en el juego de ajedrez

Al general Th. Pannentier,
miembro del Comité de fortificaciones,
inspector general de defensa de las costas.

"¿Qué diré del espíritu del juego? ¿Alguien podría definirlo? ¿Acaso no requiere cautela, sutileza y habilidad jugar al tresillo o al ajedrez? Y si la requieren, ¿por qué vemos imbéciles que se destacan en esos juegos mientras ciertos genios extraordinarios ni siquiera alcanzan la mediocridad?"
(LA BRUYERE, Des Jugements)

"Pues, si bien se puede ser un hombre de espíritu y un gran jugador de ajedrez, como Légal, también se puede ser un gran jugador de ajedrez y un tonto, como Foubert y Mayot."
(DIDEROT, Le Neveu de Rameau)

Contenido:

11. *Procedimientos mnemotécnicos*
12. *Menos de ocho damas*
13. *Las 92 posiciones de las ocho damas*
14. *Método de Gauss*
15. *Otro enunciado del problema de las damas*
16. *Desideratum*
17. *Teoremas aritméticos*
18. *Nota sobre el problema de las nueve y las diez damas*

El problema que intentamos resolver es el siguiente: *Determinar todas las formas de colocar ocho damas en el tablero común, formado por sesenta y cuatro casillas, de manera tal que ninguna de las damas pueda ser comida por otra; en otras palabras, debemos disponer sobre ocho casillas del tablero ocho damas de manera tal que dos cualesquiera de ellas no estén jamás situadas sobre una misma línea paralela a uno de los bordes o a una de las diagonales del tablero.*

Historia

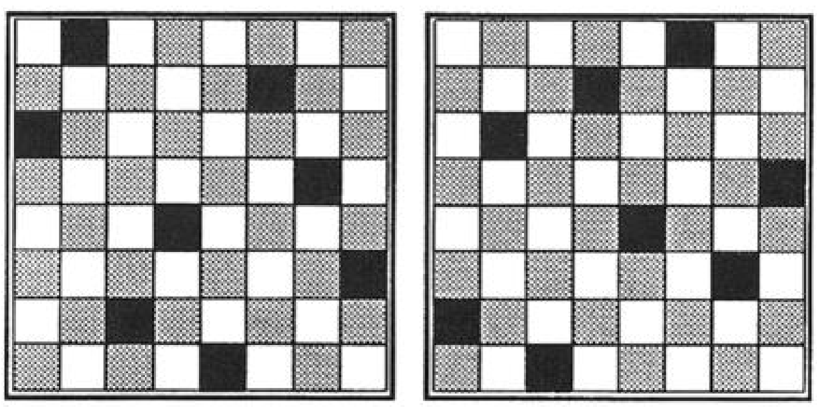
Este problema fue planteado por primera vez por Nauck al ilustre Gauss, a quien los alemanes apodaron Príncipe de las matemáticas; esta cuestión fue tema de una correspondencia establecida entre este último y el astrónomo Schumacher. Después de haber descubierto 72, luego 76 soluciones, Gauss descubrió finalmente 92 soluciones, cifra que fue definitivamente reconocida como el número exacto de soluciones posibles. El doctor S. Günther, miembro del Parlamento de Berlín, dio hace algunos años una interesante historia de ese problema célebre. Indicó, al mismo tiempo, un nuevo método de investigación para arribar a la solución del problema en cuestión, suponiendo que el tablero de 64 casillas sea reemplazado por un tablero cuadrado de cualquier tamaño; aplicó ese método a la investigación del problema de 4 y 5 damas en los tableros de 16 y 25 casillas; además, el profesor J. W. L. Glaisher, de la Universidad de Cambridge, aplicó ese mismo método al problema de 6, 7 y 8 damas en las tableros de 36, 49 Y 64 casillas.

Con anterioridad. G. Bellavitis, quien también llegó a las 92 soluciones, ya había tratado el tema. Más tarde, el problema fue planteado como cuestión a resolver por

Lionnet. En 1867, un jugador de ajedrez que creía que este problema tenía muy pocas soluciones, se lo planteó al teniente coronel Parmentier y al capitán de La Noë. Tras haber descubierto, por tanteo, un cierto número de soluciones, se esforzaron por investigar metódicamente todas las disposiciones posibles, ignorando ambos que la cuestión había sido abordada y resuelta tiempo atrás. En las páginas siguientes, indicaremos en principio en pocas palabras el método del doctor Günther, y luego desarrollaremos el método de investigación cuyo mérito atribuimos al capitán de La Noë, y que el general Parmentier tuvo a bien transmitirme en el Congreso de la *Asociación francesa para el progreso de las ciencia,* realizado en Montpellier en el mes de agosto de 1879.

1. Notaciones y convenciones

Indicamos, por medio de casillas negras, montadas sobre las casillas blancas o grises del tablero, la posición de las ocho damas; en la figura 5 ofrecemos una de las soluciones del problema.



Figuras 5 y 6

La representamos por medio del número de ocho cifras 68241753; la primera cifra, 6, indica la altura de la dama en la primera columna a la izquierda del tablero; la segunda cifra, 8, muestra que en la segunda columna hay una dama en lo alto del tablero, y así sucesivamente. De aquí en más designaremos como *columnas* las filas de casillas verticales, y como *líneas* las filas horizontales. Contaremos las columnas del 1 al 8, de izquierda a derecha, y las líneas también serán contadas de 1 a 8 de abajo hacia arriba. En consecuencia, la solución de la fig. 5 podrá escribirse:

(A)	Líneas	6	8	2	4	1	7	5	3
	Columnas	1	2	3	4	5	6	7	8

Pero, para abreviar, indicaremos esta solución, tal como lo hemos dicho, mediante el número de ocho cifras 6824 1753; ese número es la reproducción de la primera línea de la tabla precedente.

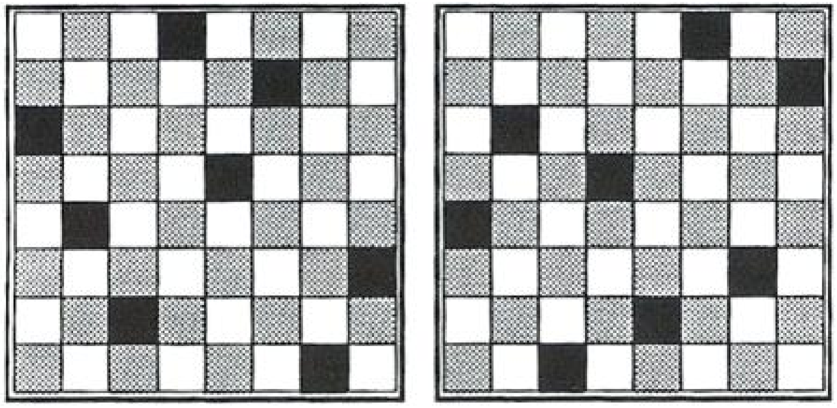
2. Soluciones asociadas

La fig. 6 representa una primera solución asociada a la de la fig. 5; la obtenemos haciendo que el tablero describa un cuarto de giro en sentido anti horario. Para obtenerla numéricamente, por medio de la primera, basta alinear las columnas de la tabla (A) de tal manera que las cifras de la primera línea sigan un orden decreciente; de este modo:

(B)	Líneas	8	7	6	5	4	3	2	1
	Columnas	2	6	1	7	4	8	3	5

Tenemos la notación abreviada de esta segunda solución si conservamos la segunda línea de cifras de la tabla (B), es decir el número 26174835.

Las figuras 7 y 8 representan una segunda y una tercera solución *asociadas* a la de la fig. 5; se las obtiene haciendo describir al tablero otro cuarto o dos cuartos de giro alrededor de su centro en el sentido ya convenido.



Figuras 7 y 8

Es posible deducir numéricamente la solución de la fig. 7 a partir de la posición 11, y la IV a partir de la III, gracias al procedimiento que nos permitió deducir la posición 11 a partir de la posición 1; pero también podemos obtener la posición III por medio de la posición 1, y la posición IV por medio de la posición n, de la siguiente manera. Las soluciones de las figuras 5 y 6 son designadas por los números

68241753 y 26174835

Escribamos las cifras de esos dos números en orden inverso:

35714286 y 53847162

Restando cada una de estas cifras de 9, obtenemos:

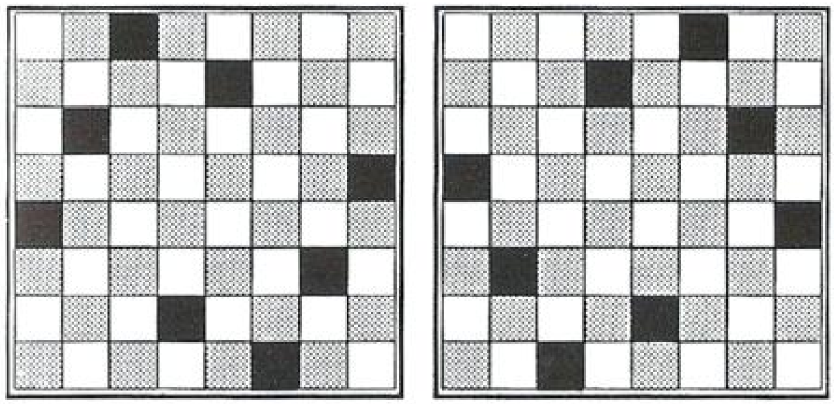
64285713 y 46152837

y éstas son las notaciones de las figuras 7 y 8.

3. Soluciones irregulares y semi-regulares

De modo que, en general, una solución cualquiera del problema de las damas, para cualquier tablero cuadrado, da llegar a cuatro soluciones *asociadas*. Decimos que ello ocurre como caso general, pero para ello es necesario que la solución considerada sea *irregular*.

En la fig. 9 ofrecemos una solución *semi-regular* del problema de las ocho damas, que brinda una única solución asociada.



Figuras 9 y 10

En efecto, si hacemos describir al tablero un medio giro, encontramos la misma disposición. El número 46827135, que representa a esta solución, posee la propiedad de que la suma de ese número y del número producido tras el giro da 99999999.

4. Soluciones regulares

Puede ocurrir, aunque no en el caso del tablero de 64 casillas, sino en el de otros tableros cuadrados, que de una solución del problema de las damas no salga ninguna disposición nueva, cuando se hace describir al tablero un cuarto de giro o más. Veremos primero que la notación empleada en este caso se aplica a todos los tableros, admitiendo que cada cifra de la notación puede ser reemplazada por un número que no exceda el número de casillas contenidas en cada lado del tablero. Sin embargo, debemos señalar que la solución de la que hablamos, y que designaremos con el nombre de *solución regular*, sólo puede presentarse, a causa de los cuatro puntos de vista según los cuales podemos imaginar el tablero, cuando el número de casillas por lado es un múltiplo de 4, como 4, 8, 12, 16 (aunque no ocurra en el caso del tablero de 64 casillas), o cuando el número de casillas por lado es igual a un múltiplo de 4 aumentado en una unidad.

Ese es el caso de las soluciones 2413 para el tablero de 16 casillas, y 25314 para el tablero de 25 casillas. Designaremos la solución semi-regular poniendo a continuación de su notación numérica *, y la solución regular, poniendo a continuación de su notación numérica **.

De este modo tenemos, por ejemplo:

46827135*, 2413**, 25314**.

5. Soluciones invertidas

Consideremos una disposición regular cualquiera, semiregular o irregular del problema de las damas; invirtamos sobre la figura el orden de las columnas o de las líneas o, lo que es lo mismo, escribamos en sentido inverso la notación numérica que representa a esa disposición o su complemento a 9: obtendremos de este modo una *solución invertida*. Es fácil constatar que esta nueva solución difiere de cualquiera de las soluciones asociadas. Se la obtendrá geométricamente mirándola en un espejo o dando la vuelta al tablero. Resulta evidente a partir de la consideración de las formas asociadas e invertidas que:

1. *Toda solución irregular simple proporciona cuatro soluciones asociadas y cuatro invertidas, OCHO en total.*
2. *Toda solución semi-regular simple proporciona dos soluciones asociadas y dos soluciones invertidas, CUATRO en total. 3. Toda solución regular simple proporciona solamente una solución invertida, DOS en total.*

Sin embargo debemos exceptuar, en esta clasificación y en este catálogo, la solución UNICA del problema de las damas, en el tablero de una sola casilla.

6. El problema de las torres

En el juego de ajedrez, el *movimiento de la dama* es, como se sabe, la resultante del movimiento de la torre y del *movimiento del alfil*. En efecto, en un tablero en el que supondremos la sola existencia de una torre, su desplazamiento se lleva a cabo hacia una casilla cualquiera a lo largo de una fila, línea o columna, paralela a uno de los bordes del tablero; del mismo modo, el desplazamiento del alfil sólo puede llevarse a cabo siguiendo una línea paralela a una de las diagonales del tablero. De esta observación resulta inmediatamente que las soluciones del problema de las ocho damas deben tornarse entre las soluciones del *problema de las ocho torres*, que consiste en disponer sobre el tablero ocho torres que no puedan comerse entre sí, del mismo modo que entre las soluciones del *problema de los ocho alfiles*, que consiste en disponer ocho alfiles que no puedan comerse mutuamente. El problema de las ocho torres en un tablero de 64 casillas, o de 9, 10, 11... torres sobre tableros de 81, 100, 121... casillas es bien conocido bajo una forma puramente aritmética. Limitándonos al tablero común, y sirviéndonos de la notación numérica del problema de las damas, bastará en realidad con permutar los primeros ocho números de todas las maneras posibles.

7. Permutaciones rectilíneas

En el tablero de 2 casillas de lado, tenemos las *dos soluciones*:

12 y 21

En el tablero de 3 casillas de lado, basta con colocar la cifra 3 delante o detrás de cada una de las cifras de los dos números anteriores; de este modo tenemos las *seis soluciones*:

312, 132, 123 y 321, 231, 213.

Asimismo, en el tablero de 4 casillas por lado, colocaremos la cifra 4 en todos los sitios posibles en cada uno de los seis números precedentes; cada número ofrece cuatro posiciones posibles, lo que da veinticuatro soluciones del problema de 4 torres en un tablero de 16 casillas.

Prosiguiendo, para obtener el número de soluciones del problema de las CÚTRO torres en un tablero de 25 casillas, habrá que multiplicar por 5 el número de soluciones del problema de las cuatro torres, y así sucesivamente. De este modo, el número de soluciones del problema de las ocho torres en el tablero común es igual al producto de los primeros ocho números:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = 40320$$

Sobre un tablero de 100 casillas, el número de soluciones diferentes del problema de las diez torres es igual a 3 628 800.

8. El problema de los alfiles

El número de soluciones del problema de los alfiles es mucho mayor y presenta desarrollos bastante más difíciles; en efecto, veremos que no solamente es sencillo colocar 8 alfiles en el tablero, sino que podemos colocar hasta 14, sin que se amenacen mutuamente. De este modo, por ejemplo, podemos colocar 8 sobre las casillas de la primera columna, y 6 sobre las de la última, suprimiendo las dos casillas de los extremos. Así, es preferible volver sobre las diversas soluciones del problema de las torres y conservar, entre ellas, sólo aquellas soluciones que conciernen al problema de las damas.

Desde el punto de vista aritmético, el problema de las ocho torres se reduce, tal como hemos visto, a efectuar todas las permutaciones posibles de los ocho primeros números; el problema de las ocho damas se reduce a elegir, entre ellas, todas las permutaciones en las que la diferencia absoluta de dos cifras cualesquiera no es igual a la diferencia de las posiciones ocupadas por esas dos cifras dentro de b permutación considerada.

Esta nueva condición alude, tal como se observará con facilidad, al movimiento del alfil, que debemos sumar al de la torre para obtener el de la dama.

En consecuencia, para resolver el problema de las ocho damas, debemos encontrar todos los números de ocho cifras, formados por las ocho primeras cifras, todos diferentes entre sí, pero en un orden cualquiera, de manera tal que la diferencia entre dos de ellos sea distinta de la diferencia cutre las posiciones que ellos ocupan; así ha planteado este problema hace poco tiempo el señor Lionnet en *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

9. Método de Günther

En el fondo, este método se diferencia poco del método aritmético del que ya hemos hablado. Vamos a explicarlo en un tablero de veinticinco casillas, que representaremos de la siguiente manera:

$$\begin{vmatrix} a_1 & f_2 & g_3 & h_4 & i_5 \\ b_2 & a_3 & f_4 & g_5 & h_6 \\ c_3 & b_4 & a_5 & f_6 & g_7 \\ d_4 & c_5 & b_6 & a_7 & f_8 \\ e_5 & d_6 & c_7 & b_8 & a_9 \end{vmatrix}$$

Cada casilla está representada por un elemento compuesto por una letra y un índice; los elementos que poseen la misma letra se sitúan sobre una paralela a una de las diagonales del tablero, y corresponden a una de las direcciones del movimiento del alfil; los elementos que poseen el mismo índice se sitúan en una paralela a la otra diagonal del tablero y corresponden a la otra dirección del movimiento del alfil. Supongamos ahora que escribimos, en un orden cualquiera, todos los términos formados por cinco elementos pero de tal manera que esos términos no puedan contener dos elementos pertenecientes a una misma línea o a una misma columna: de esta manera habremos representado las 120 soluciones del problema de las cinco torres. Hecho esto, suprimimos entre esas soluciones todas aquellas en las que dos elementos contienen la misma letra o el mismo índice: entonces, no quedará más que la disposición referida al problema de las cinco damas.

No es necesario escribir todas las soluciones del problema de las cinco torres, que podríamos formar por medio de las soluciones del problema de las cuatro torres, tal como ya lo hemos explicado. Encontramos grandes simplificaciones en la aplicación de este método si utilizamos los recursos proporcionados por una importante teoría de álgebra conocida con el nombre de *teoría de los determinantes*. Sin embargo, pese a toda la pericia mostrada por Günther y Glaisher con respecto a esta cuestión, el problema de las nueve damas o de las diez damas, en los tableros de 81 y 100 casillas, resulta aparentemente inabordable siguiendo este método.

10. Método de de la Noë

Este método consiste en la descomposición del tablero en cuadrados concéntricos; el primero forma un cuadrado interior o primera franja de cuatro casillas de las que una es *a*; designaremos con el nombre de *segunda franja* al espacio formado por las 12 casillas que rodean al primer cuadrado; con el de *tercera franja* al espacio formado por las 20 casillas que rodean a la segunda franja; con el de *cuarta franja* al espacio formado por las 28 casillas que rodean a la tercera franja; continuaríamos de la misma manera en el caso de un *tablero par* de cualquier tamaño, es decir, en el caso de un tablero cuyo número de casillas sea par en cada lado. El número de casillas de cada franja aumenta en 8 cuando pasamos a la franja siguiente. En un *tablero impar*, la primera franja estará formada por 1 casilla; la segunda franja, por 8, y las siguientes, por 16, 24, 32... casillas.

Partamos de la primera franja, y coloquemos una dama en *a*; observaremos que esa dama puede ocupar, con un solo desplazamiento, 28 casillas del tablero, número que es siempre igual al número de casillas de la franja exterior del tablero; en la segunda franja, una dama domina 26 casillas; en la tercera. 24, y en la cuarta. 22. Ahora, procuramos colocar el mayor número posible de damas en la segunda franja de todas las maneras posibles. Vemos que podemos colocar dos damas en la segunda franja, en *b* y *c*, o bien en *b'* y *c'*; es inútil conservar, por el momento, esa segunda disposición simétrica de la primera.

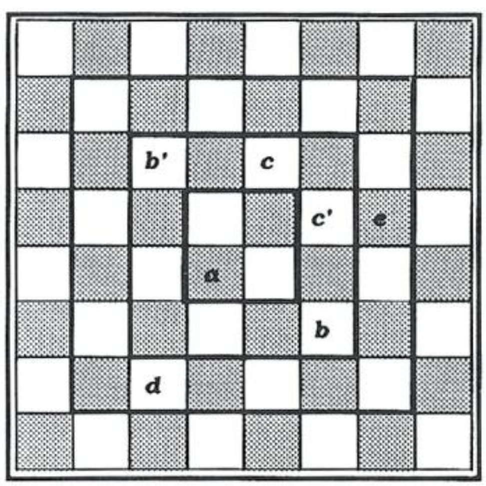


Figura 11

En efecto, en el caso del tablero de 16 casillas, la primera disposición (*abc*) se escribiría 0241; la solución invertida seria 1420, y haciendo describir al tablero tres cuartos de giro, obtendríamos la disposición 4203, que es precisamente la misma que (*b'ac'*). Por una razón semejante a la anterior, vemos que no es necesario desplazar la dama a hacia las otras casillas de la primera franja.

Partiendo de (*abc*), colocaremos el mayor número posible de damas sobre la tercera franja, en d y e. por ejemplo; sólo quedará entonces colocar tres damas sobre la franja exterior. y constataremos con facilidad que esto es imposible; así, al colocar las cinco damas (*abcde*), no llegaremos a ninguna solución. Intentaremos entonces conservar sólo una dama en la tercera franja, ya sea en *d* o en *e*. y veremos que ninguna de estas disposiciones conduce a una solución;

Además, no podemos colocar cinco damas en una sola franja; en consecuencia, el comienzo (*abc*) no puede conducir a ninguna solución.

Conservando la dama *a*, intentaremos sucesivamente, conservando también *b* o *c*. colocar las otras seis damas en las dos últimas franjas; pero no encontramos ninguna solución; de lo cual extraemos la conclusión de que las dos primeras franjas no pueden estar simultáneamente ocupadas por las damas; es ése un hecho observado en todos los tableros, hasta el de 64 casillas, por Parmentier; pero que no tiene vigencia en el caso del tablero de cien casillas.

Conservamos ahora la dama a y procuramos colocar el mayor número posible de damas en la tercera franja; podemos colocar allí tres de diversas maneras. Luego, excluyendo las soluciones asociadas o invertidas, colocamos las cuatro damas en la cuarta franja y encontramos de este modo cuatro soluciones simples irregulares:

35841726, 46152837, 48157263, 42751863

Corresponden al tipo 1034. Las cifras del tipo representan sucesivamente el número de damas colocadas en cada franja.

Suprimiendo la dama a, y colocando tres damas, luego dos, después una sola en la segunda franja, encontramos las siguientes soluciones simples irregulares:

- 72631485; para el tipo 0314,
- 57263148, 16837425; para el tipo 0233,
- 61528374, 57263184, 51468273; para el tipo 0224,

- 58417263, para el tipo 0134.

Finalmente, si no colocamos ninguna dama en las dos primeras franjas, encontramos la solución semi-regular de la fig. 10. que pertenece al tipo 0044. De este modo, en general, el problema de las ocho damas comporta doce soluciones simples de las que once son irregulares y una es semi-regular. En total, noventa y dos soluciones distintas.

Para resumir el problema de las ocho damas, ofrecemos la tabla de las doce soluciones simples en el siguiente orden:

Tabla de las soluciones simples del problema de las ocho damas

Nº de Orden	Notación	Tipo	Nº de Orden	Notación	Tipo
1	72631485	0314	7	16837425	0233
2	61528374	0224	8	57263184	0224
3	58417263	0134	9	48157263	1034
4	35841726	1034	10	51468273	0224
5	46152837	1034	11	42751863	1034
6	57263148	0233	12	35281746*	0044

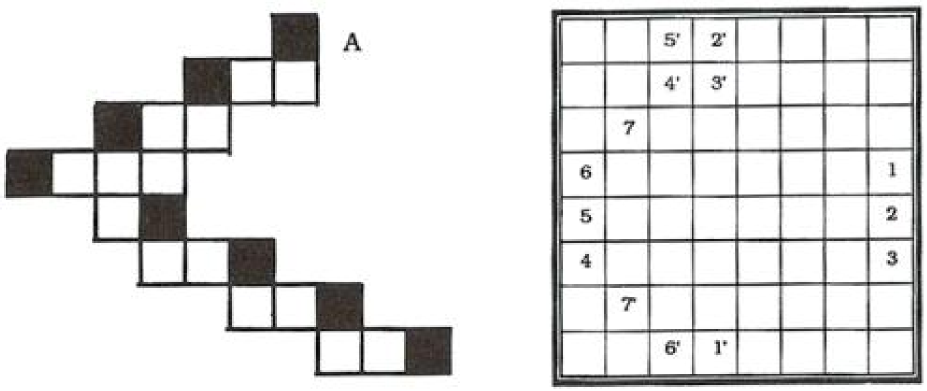
11. Procedimientos mnemotécnicos

Podemos recordar la primera solución, de la cual se deducen regularmente las seis siguientes, por medio de una frase mnemotécnica como la siguiente:

Sentar damas se torna una cuestión obviamente corajuda.
siete dos seis tres uno cuatro ocho cinco.

Deducimos la segunda solución, y la tercera, bajando un lugar todas las damas de la primera solución, y llevando a lo alto del tablero la dama que se encontraba en la primera línea. Obtenemos las soluciones números 4, 5 y 6 avanzando un lugar hacia la derecha todas las damas de las soluciones 1, 2 y 3; deducimos la séptima solución a partir de la sexta, elevando un lugar todas las damas y trasladándolas un lugar hacia la derecha.

Además podemos utilizar el método siguiente: dibujamos la fig. 12, formada por dos líneas de cuatro caballos, y lomamos como punto de partida en el tablero, como casilla A, una de las casillas numeradas de la fig. 13; los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ofrecen las siete primeras soluciones, y los números 1', 2', 3', 4', 5', 6' y 7' nos dan las soluciones invertidas. Hay que suponer el tablero rodeado por otros ocho, para la colocación de las damas, y luego reemplazados por el primero.



Figuras 12 y 13

Para las otras cinco, operamos de la siguiente manera:

La octava solución se obtiene por medio de la sexta, intercambiando solamente las dos últimas damas.

La novena solución se obtiene por medio de la octava, avanzando todas las damas tres casillas hacia la derecha, e intercambiando luego la primera dama con la tercera.

La décima solución se deduce de la novena, subiendo una casilla todas las damas situadas por encima de la tercera fila horizontal y, corrigiendo la posición, elevando la dama de la tercera columna vertical de la primera casilla a la cuarta.

La undécima solución puede deducirse también de la novena, dejando en su lugar las damas de las cuatro filas horizontales del medio y desplazando simétricamente a las otras cuatro damas, con respecto a la cuarta columna vertical.

En cuanto a la duodécima solución, es simétrica y fácil de retener.

12. Menos de ocho damas

Aplicando el método precedente a tableros de menos de 64 casillas, Parmentier descubrió los resultados consignados en la tabla siguiente:

n	N	Total	Tipo	Notación
4	16	2	04	2413 **
5	25	10	104	25314 **
			023	53142
6	36	4	024	246135 *
7	49	40	0124	6357142
.	..	..	1024	5724613 *
.	..	..	"	3724615 *
.	..	..	0214	4613572
.	..	..	0133	1357246
.	..	..	"	3572461

Tabla de las soluciones simples del problema de las 4, 5, 6. 7 damas

La columna *n* designa el número de casillas por lado, y la columna N el número total de casillas del tablero; de modo que N = n^2.

La tercera columna indica el número total de soluciones diferentes; la cuarta columna indica el tipo; finalmente la quinta columna da la notación de las soluciones simples. No hay ninguna solución para los tableros de 4 y de 9 casillas.

Así reencontraremos el número de soluciones ofrecidas, por una parte, por Günther y Glaisher y, por otra parte, por Bellavitis, en su 10ª *Rivista dei Giornali* (pp. 8 y 9).

13. Las 92 posiciones de las ocho damas

La tabla siguiente contiene las 92 soluciones posibles del problema de las ocho damas; es, tal como ya lo hemos dicho, el conjunto de todos los números formados por cifras diferentes, de 1 a 8, de tal manera que la diferencia de dos cifras no resulte nunca igual a la diferencia entre las posiciones que ocupan. Es la reproducción de la tabla realizada en 1867, en Constantine, por el señor Parmentier.

Señalaremos que la tabla contiene:

- 4 soluciones que comienzan o terminan con las cifras 1 u 8;
- 8 soluciones que comienzan o terminan con las cifras 2 o 7;

- 16 soluciones que comienzan o terminan con las cifras 3 o 6;
- 18 soluciones que comienzan o terminan con las cifras 4 o 5.

Las ocho columnas de 92 cifras totalizan lo mismo: 414 o 18 veces 23. En cada doble columna hay, necesariamente, la misma cantidad de cifras 1 que de cifras 8, 2 que 7, 3 que 6, 4 que 5.

1	1586 3724	24	3681 5724	47	5146 8273	70	6318 5247
2	1683 7425	25	3682 4175	48	5184 2736	71	6357 1428
3	1746 8253	26	3728 5146	49	5186 3724	72	6358 1427
4	1758 2463	27	3728 6415	50	5246 8317	73	6372 4815
5	2468 3175	28	3847 1625	51	5247 3861	74	6372 8514
6	2571 3864	29	4158 2736	52	5261 7483	75	6374 1825
7	2574 1863	30	4158 6372	53	5281 4736	76	6415 8273
8	2617 4835	31	4258 6137	54	5316 8247	77	6428 5713
9	2683 1475	32	4273 6815	55	5317 2864	78	6471 3528
10	2736 8514	33	4273 6851	56	5384 7162	79	6471 8253
11	2758 1463	34	4275 1863	57	5713 8642	80	6824 1753
12	2861 3574	35	4285 7136	58	5714 2863	81	7138 6425
13	3175 8246	36	4286 1357	59	5724 8136	82	7241 8536
14	3528 1746	37	4615 2837	60	5726 3148	83	7263 1485
15	3528 6471	38	4682 7135	61	5726 3184	84	7316 8524
16	3571 4286	39	4683 1752	62	5741 3862	85	7382 5164
17	3584 1726	40	4718 5263	63	5841 3627	86	7425 8136
18	3625 8174	41	4738 2516	64	5841 7263	87	7428 6135
19	3627 1485	42	4752 6138	65	6152 8374	88	7531 6824
20	3627 5184	43	4753 1682	66	6271 3584	89	8241 7536
21	3641 8572	44	4813 6275	67	6271 4853	90	8253 1746
22	3642 8571	45	4815 7263	68	6317 5824	91	8316 2574
23	3681 4752	46	4853 1726	69	6318 4275	92	8413 6275

Tabla de las 92 soluciones del problema de las ocho damas

14. Método de Gauss

En la tabla precedente, las soluciones están dispuestas en orden numérico. Es posible construir una tabla por medio de un procedimiento sistemático, cuya aplicación es muy simple y que fue ideado por Gauss y redescubierto por Laquière en 1881. En primer lugar colocamos una dama en la casilla menos elevada de la primera columna de la izquierda; a continuación colocamos una segunda dama en la segunda columna, en la casilla menos elevada que sea posible, y así sucesivamente, intentando siempre colocar una dama en una nueva columna a la derecha, lo más bajo que sea posible, según las condiciones impuestas por el problema, es decir, teniendo en cuenta las posiciones de las damas ya colocadas a la izquierda. Cuando llega el momento en que ya no es posible colocar ninguna dama en su columna correspondiente, subimos la de la columna anterior una, dos,... casillas, y continuamos respetando siempre el mismo principio, el de no subir una dama a menos que no haya más posiciones admisibles para colocar las damas a la derecha.

Cada vez que encontramos una solución, la inscribimos según la notación convenida, y de este modo las soluciones hallarán dispuestas siguiendo el orden numérico de la notación. Además, verificamos la tabla así obtenida reuniendo en un mismo grupo todas las soluciones que podemos deducir de una primera, por medio de la rotación o la inversión del tablero, tal como lo hemos explicado en la parte correspondiente a las soluciones asociadas e invertidas.

Siguiendo este método, Laquiêre hizo hacer a un niño, en una tarde, la tabla de las 92 soluciones del tablero de 64 casillas. Esa tabla, de sencilla verificación, sólo contenía tres errores, procedentes de una sola omisión y de dos soluciones inexactas.

15. Otro enunciado del problema de las damas

Por medio de esa tabla, es fácil dar solución al problema de las ocho damas, enunciado de la siguiente manera:

Colocar una dama sobre una casilla cualquiera de las 64 del tablero común de ajedrez; determinar luego todas las maneras posibles de disponer otras siete damas de tal manera que ninguna de ellas pueda ser comida por las otras.

Para resolver completamente este nuevo problema, es bueno observar que no es necesario considerar indistintamente todas las casillas en las que podemos colocar la primera dama sino solamente las casillas numeradas de la fig. 14; éstas cubren un poco más de la octava parte del tablero; obtendremos las soluciones que corresponden a las otras casillas por medio de procedimientos de simetría, siguiendo los cuatro ejes de simetría del tablero.

Para obtener todas las soluciones que provienen de la casilla inicial 11, bastará con tomar de la tabla completa de las 92 soluciones aquellas cuya *primera cifra* de la izquierda es uno; para obtener todas las soluciones que provienen de la casilla 22, elegiremos aquellas cuya *segunda cifra* es dos; para obtener todas las soluciones que provienen de la casilla 43 tomaremos, de la tabla, todos los números cuya *cuarta cifra* sea tres, y así sucesivamente.

			44
		33	43
	22	32	42
11	21	31	41

Figura 14

La tabla de la página siguiente contiene tres columnas: la primera indica el número de la casilla inicial; la segunda contiene el número de soluciones para esa casilla, y la tercera columna, los números de las soluciones para las cuales debemos referimos a la tabla siguiente.

CASILLA	NUMERO	NUMEROS DE ORDEN DE LAS SOLUCIONES
11	4	1,2,3,4.
21	8	13,29,30,47,48,49,65,81.
31	16	8,37,40,44,45,54,55,57,58,68,69,70,76,84,91,92.
41	18	6,12,16,21,23,24,52,53,62,63,64,66,67,78,79,82,88,89.
22	16	31,32,33,34,35,36,50,51,52,53,66,67,82,83,89,90.
32	14	14,15,18,19,20,26,27,59,60,61,77,80,86,87.
42	8	22,25,38,42,65,73,74,85.
33	4	10,41,81,88.
43	12	2,9,32,33,39,43,44,46,57,83,90,92.
44	8	7,17,48,56,58,59,75,80.

Observaremos que las casillas 11 y 33 están menos favorecidas que las otras, pero siempre hayal menos cuatro soluciones, y dieciocho como máximo, tomando como casilla inicial una cualquiera del tablero.

16. Desideratum

Acabamos de indicar todo lo que se conoce, o casi todo, acerca del problema de las damas. Pero si el tablero tiene 9 o 10 casillas por lado, el problema se complica de tal modo que ya no conocemos el número de soluciones. Es posible que exista interés en determinar el número de soluciones del problema en tableros de 81, 100, 121 Y 144 casillas. Así, es posible que la observación de la tabla del número de soluciones en los tableros de 2 a 12 casillas de lado pudiera conducir ya sea a la invención de otros métodos de investigación o a nuevas propiedades de los números enteros. La enorme dificultad del problema estriba en que el número de permutaciones de *n* objetos aumenta considerablemente con *n*, y que, en consecuencia, el número de permutaciones que no se ajustan al problema de las *n* damas también aumenta rápidamente.

Para el tablero de *n* casillas de lado, podemos encontrar inmediatamente diversas soluciones simples, que deducirlos a partir de la consideración de la progresión aritmética. Designemos, para abreviar, con a el número diez, con b el número once; formemos las progresiones aritméticas siguientes, en las que suprimimos los múltiplos de once, pudiendo el número b ser reemplazado por cero:

Progresión	1,	3,	5,	7,	9,	*b*,	2,	4,	6,	8,	*a*,	de razón	2;
———	1,	4,	7,	*a*,	2,	5,	8,	*b*,	3,	6,	9,	———	3;
———	1,	5,	9,	2,	6,	*a*,	3,	7,	*b*,	4,	8,	———	4;
———	1,	6,	*b*,	5,	*a*,	4,	9,	3,	8,	2,	7,	———	5;
———	1,	7,	2,	8,	3,	9,	4,	*a*,	5,	*b*,	6,	———	6;
———	1,	8,	4,	*b*,	7,	3,	*a*,	6,	2,	9,	5,	———	7;
———	1,	9,	6,	3,	*b*,	8,	5,	2,	*a*,	7,	4,	———	8;
———	1,	*a*,	8,	6,	4,	2,	*b*,	9,	7,	5,	3,	———	9.

Todas estas soluciones se adecuan al problema de las once damas; estas soluciones representan además, sobre el tablero, lo que llamamos *texturas de satenes regulares sobre once láminas*, cuya teoría general planteamos en el opúsculo *Principii fundamentali della geometria dei tessuti*.

17. Teoremas aritméticos

Consideremos una progresión aritmética de razón r:

$$a, a + r, a + 2r, a + 3r, \ldots$$

Si tomamos los restos de la división de los diferentes términos por un número p. sólo puede haber p restos diferentes; además, esos restos se reproducen periódicamente de p en p. Para que todos los restos sean diferentes, es necesario y suficiente que el número p sea coprimo con la razón r. En efecto, designando m y n los restos de orden m y n, tenemos:[2]

$$(Módulo\ \boldsymbol{p}), r_m \equiv a + (m-1)r$$

$$(Módulo\ \boldsymbol{p}), r_n \equiv a + (n-1)r$$

Y, por diferencia,

$$(Módulo\ \boldsymbol{p}), r_m - r_n \equiv (m-n)$$

En consecuencia, si los restos r_m y r_n fueran idénticos, el producto (m-n)r sería divisible por p, pero como hemos supuesto que p es coprimo con r dividiría entonces al número (m-n), más pequeño que él, lo que resultaría imposible, entonces:

TEOREMA I. *Si se divide por un número p coprimo con la razón, p términos consecutivos de una progresión aritmética formada por números enteros, todos los restos son diferentes.*

Decimos entonces que esos restos forman un *sistema completo de residuos respecto del módulo p*.

---

[2] La notación a ≡ b (Módulo *p*) significa que a y b difieren en un múltiplo cualquiera de p. Se lee *a es congruente con b respecto del módulo p*. Fue ideada por Gauss.

Supongamos, además, que p designa un número coprimo con la razón, y coprimo con la razón aumentada o disminuida de una unidad; tenemos entonces el siguiente teorema:

TEOREMA II. *Si se dividen p términos consecutivos de una progresión aritmética de razón r por un número p coprimo con cada uno de los números r, r+1, r-1, la diferencia de dos restos cualesquiera no es nunca, en valor absoluto, igual a la diferencia de los órdenes que ocupan dentro de la progresión.*

En efecto, si suponemos

$$(Módulo\ \boldsymbol{p}), r_m - r_n \equiv (m - n)$$

reduciremos, a partir de lo precedente:

$$(Módulo\ \boldsymbol{p}), (m - n)r \equiv \pm(m - n)$$

o bien:

$$(Módulo\ \boldsymbol{p}), (m - n)(r \pm 1) \equiv 0$$

En cuyo caso p coprimo con r ± 1 dividiría al número (m- n) más pequeño que él, lo que resulta imposible.

De estos dos teoremas resulta que en muchos casos podemos encontrar un gran número de soluciones del problema de las p damas, suponiendo que p designa un número impar, no divisible por 3.

18. Nota sobre el problema de las nueve y las diez damas

Desde la aparición de nuestro primer volumen, un distinguido geómetra, el doctor P. H. Schoute, profesor de la Universidad de Groninga, publicó en *Eigen Haard*, publicación ilustrada de Holanda, una serie de artículos con el título *Wiskundige Verpoozingen*. Allí encontramos numerosos desarrollos de los problemas tratados. Schoute ha dado la tabla de las soluciones simples del problema de las nueve damas sobre el tablero de 81 casillas; pero esa tabla contiene dos errores rectificados por, Delannoy, que es muy hábil para ese tipo de investigaciones. El problema de las nueve damas tiene 46 soluciones simples, entre las que hay 4 semi-regulares, lo que totaliza 352 posiciones.

136824975	248396157	279631485
137285946	249731685	281479635
138692574	249753168*	285396417
146392857	257936418	286931475
146825397	257948136	358296174
147382596	258136974	358297146
147925863	258196374	359247186
148397526	258693147	362951847*
157938246	258693174	368159247*
157942863	259418637	368519724
159642837	261379485	369741825
168374295	261753948*	372859164
174835926	261958473	386192574
174839625	263184975	427918536
241796358	269358417	
247139685	275194683	

1ª Tabla de las soluciones simples del problema de las nueve damas

Si suprimimos la unidad de las primeras catorce soluciones, y disminuimos en una unidad todas las otras cifras, obtenemos una solución del problema de las ocho damas. A la inversa, toda solución del problema de las nueve damas. en la cual una de las diagonales no contiene ninguna dama, origina otras dos soluciones del problema de las diez damas, agregando una dama en una de las esquinas exteriores de la misma diagonal. La solución 358297146, que no tiene ninguna dama sobre ninguna de ambas diagonales, ofrece cuatro soluciones simples del problema de las diez damas; encontramos de este modo 32. Delannoy ha preparado la tabla de las soluciones del problema de las diez damas; hay 92 soluciones simples, de las cuales 3 son semi-regulares, lo que da un total de 724 posiciones. En esta tabla, la décima línea está designada con 0.

1368059247	1683792504	2630859417	3591607248
1369704258	1680493572	2683195047	3592074186
1369704285	1693842057	2683740195	3594108627
1397042586	1693074258	2691853074	3620195847
1469308257	1695084273	2697013584	3640195827
1470295386	1603794258	2603794158	3681470295
1470392586	1796308524	2793804615	3680195247
1470692538	1849730625	2706195384	3680415297
1470825369	1869304752	2839750164	3691470258
1470835926	2468013579*	2859160374	3691470825
1470852936	2483960175	2803964175	3691057248
1495803627	2480596137	2804159637	3728610594
1497203685	2497501683	2918530746	3827105964
1497036258	2407963185	2938046157	3862051497
1407935286	2571069384	2930741586	3869105724
1570429368	2581703649	2950146837	3801625794
1580372469	2584703169	2961307485	3960271485
1580742963	2586307149	2963041857	4259108637
1506924738	2580369147	2968013574	4280136975
1647039258	2591047386	2973085146	4695013827
1647082539	2594086317	2970415863	4835019627
1649730258	2637019584	3528074196	4852017936
1640793528	2637085149	3570461928	4859102637*

2ª Tabla de las soluciones simples del problema de las diez damas

Desde hace algunos años se han obtenido nuevos y numerosos resultados con respecto al problema de las torres, de los alfiles y de las damas. Sin embargo, no pudieron hallarse hasta el presente las fórmulas generales para los problemas de los alfiles y las damas, mientras que sí se pudo obtener la solución completa de diversas cuestiones con respecto al problema de las torres, imponiendo ciertas condiciones. En nuestra *Memoria Sobre la Aritmética figurativa* (Congreso de Rouen, 1883), hemos ofrecido de una manera general el número de soluciones del problema de las torres o de las *permutaciones figuradas* en los casos que siguen:

1. *Soluciones simétricas con respecto al centro del tablero:*
2. *Soluciones simétricas con respecto a una diagonal;*
3. *Soluciones simétricas con respecto a ambas diagonales;*
4. *Soluciones que coinciden con sí mismas al girar el tablero un cuarto de giro:*
5. *Soluciones que no poseen ninguna torre en una diagonal:*
6. *Soluciones simétricas con respecto a una diagonal y que no contienen ninguna torre en esa diagonal:*
7. *Soluciones simétricas con respecto al centro sin que haya ninguna torre en*

una de las diagonales;

8. *Soluciones simétricas con respecto a las dos diagonales, que no contengan ninguna torre en una o en las dos diagonales.*
9. *Soluciones simétricas con respecto a las dos diagonales, que no contengan ninguna torre en una o en las dos diagonales.*

En particular, el quinto caso, tratado por Euler, ofrece la solución del famoso y difícil problema de los reencuentros, que consiste en determinar el número de permutaciones de *n* elementos, en las cuales cada uno de los elementos no puede ocupar el lugar que ocupa en el orden natural. Debemos señalar por sobre todo en nuestro trabajo el método tan elegante indicado por el señor Neuberg, profesor de la Universidad de Lieja.

Ese método se aplica a gran número de problemas diferentes y, en particular, al estudio de las disposiciones discordantes de un ordenamiento dado, es decir a disposiciones tales que cada uno de los elementos ocupa un lugar diferente del que ocupa en un ordenamiento previamente convenido. Hay posibilidad entonces de buscar el número de disposiciones discordantes de dos ordenamientos dados, y en particular el número de permutaciones figuradas cuando no hay ninguna torre sobre una diagonal ni tampoco sobre una línea paralela obtenida subiendo todas las casillas de esa diagonal un mismo número de filas.

Más particularmente, el problema de determinar todas las soluciones del problema de las torres, no habiendo ninguna torre sobre una diagonal ni sobre la paralela contigua, se basa en el problema de las n parejas que enunciamos de este modo: *Un número n de mujeres están sentadas en cierto orden alrededor de una mesa redonda; ¿de cuántas maneras pueden situarse sus maridos, de manera tal que cada hombre quede colocado entre dos mujeres pero sin hallarse inmediatamente a la derecha o a la izquierda de su esposa?*

Observaremos que si bien sólo se impone una condición, es decir que el marido no puede hallarse a la derecha (ni a tu izquierda) de su esposa, con el objeto de evitar emparejamiento tanto a la izquierda como a la derecha, el problema de las parejas remite al de los reencuentros. Así, necesitamos resolver el problema de los re encuentros antes que el de las parejas.

Ya hemos demostrado que, en el tablero de n^2 casillas, podemos colocar un número máximo de alfiles igual a 2n - 2, de 2^n maneras diferentes, suponiendo que dos alfiles cualesquiera no puedan comerse. En ese caso, los alfiles deben estar siempre colocados en los bordes del tablero.

Finalmente, hemos demostrado que, en el caso del problema de las torres, el número de torres colocadas en las casillas del mismo color que la diagonal principal es siempre un número par.

En el mismo volumen de la Asociación francesa, en el Congreso de Rouen, debemos destacar las interesantes Memorias de Mantel y Parmentier. En su trabajo sobre las ir *Combinaciones de elementos dispersos en un plano*. Mantel, profesor en Delft, determinó el número X de distintas maneras de colocar dos damas que no pueden comerse, en un tablero de n^2 casilleros, y dio la fórmula

$$X_2 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)(3n-1)$$

Demostró que el número de maneras de colocar p damas que no puedan comerse en un tablero de n^2 casilleros, suponiendo $p<n$, puede representarse por un polinomio en n de grado $2p$.

En su Memoria sobre el *problema de las n damas*, el general Parmentier ofreció la tabla completa de las soluciones para n = 7, 8, 9. Colocando los números de las soluciones en las casillas que corresponden a la posición inicial de una primera dama, formamos de este modo para los tableros de 8^2 y 9^2 casillas las figuras que siguen:

			8
		4	12
	16	14	8
4	8	16	18

				40
			36	20
		28	38	38
	32	44	48	44
28	30	47	44	54

Figuras 14 a y b

En vez de darse una sola posición inicial, podemos tomar las posiciones iniciales de dos damas, En particular, existen grupos de posiciones de dos damas para los cuales el proobleme de las ocho damas es imposible. Completando la notación del tablero, a partir de la fig. 14, Y considerando solamente las posiciones de dos damas que no pueden comerse, encontramos que el problema de las ocho damas es imposible cuando tenemos como casillas iniciales

- 11 con 23, 24, 28, 36, 37, 45, 47, 56, 68, 78;
- 12 con 55, 57, 63, 66, 74, 75, 86, 87;
- 13 con 36, 52, 76;
- 14 con 53;
- 23 con 36, 66;
- 24 con 47, 63, 66, 75;
- 34 con 46, 75,

o posiciones simétricas con respecto a una diagonal; por otra parte, con la casilla 11 podemos elegir otra casilla de 35 maneras diferentes, de manera tal que el problema de las ocho damas sea posible, agregando seis damas a las dos primeras.

Podemos además plantearnos el problema de superponer, sin confusión, varias soluciones del problema de las damas.

4	.	1	2	5	6	.	3
.	3	5	6	1	2	4	.
5	1	.	4	3	.	6	2
6	2	3	.	.	4	5	1
3	5	6	.	.	1	2	4
2	4	.	1	6	.	3	5
.	6	2	3	4	5	1	.
1	.	4	5	2	3	.	6

Figura 14c

De este modo, para el tablero de 8^2 casillas, podemos superponer hasta seis posiciones del problema de las ocho damas; en particular, hemos encontrado la solución siguiente, en la cual las mismas cifras corresponden a una misma solución del problema de las damas. Resolvemos así b pregunta siguiente: *dados 6 grupos de ocho fichas de colores diferentes, colocar las 48 fichas en las casillas de un tablero común, de manera tal que dos fichas del mismo color 1/0 puedan encontrarse en una misma línea horizontal, vertical o diagonal.*

Podemos superponer también, pero de manera menos simétrica, las seis soluciones de la tabla de la página 58 que corresponden a las numeraciones:

8, 15, 43, 50, 78, 85,

o incluso

2, 13, 31, 62, 80, 91.

En el *Boletín de la Sociedad Matemática de Francia* (tomo XI), Perott ha agregado una contribución importante al problema de las torres y al de los alfiles. En particular, encontró que en las 32 casillas blancas (o negras) del tablero común, podemos colocar r alfiles, que no se amenazan, siendo r =1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, de f_r maneras diferentes.

r:	1	2	3	4	5	6	7
fr:	32	356	1704	3532	2816	632	16

Por otra parte, f_r = O para r>7. Por otro lado, si n designa uno de los catorce primeros enteros, el número F n de maneras de colocar n alfiles, que no puedan comerse, sobre el tablero común de 64 casillas, viene dado por la fórmula:

$$F_n = f_n + f_1 f_{n-1} + f_2 f_{n-2} + \ldots + f_{n-1} f_1 + f_n$$

De este modo para n = 8, *podemos colocar ocho alfiles, que no puedan comerse, sobre el tablero común, de 22 522 960 maneras diferentes.*

El doctor Peino profesor de la Escuela Real de Bochum, retornó de manera completa la historia y la exposición de los diversos métodos del problema de las damas.

En esta obra de 62 páginas, encontramos siete planchas grabadas que muestran las figuras de todas las posiciones del problema de las *n* damas, para *n* = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. El autor nos advierte que debemos a Gauss el método que habíamos atribuido a Laquiêre. En una carta a Schumacher, fechada en 1850. Gauss indicó el medio de facilitar la selección de las posiciones de las damas mediante el empleo de cartones móviles cortados en estrella que servían para enmascarar las casillas amenazadas por la posición de una dama.

En el mes de octubre de 1889, Claude Bottan nos envió de Montvazon, cerca de Valognes, los resultados de sus investigaciones sobre el número de soluciones del problema de las once damas, e interesantes observaciones sobre la filiación o la genealogía de las soluciones cuando pasamos de un tablero de n^2 casillas a uno de $(n + 1)^2$ casillas. Al mismo tiempo, Tarry, ex alumno de la Escuela Politécnica, inspector de finanzas en Argelia, nos envió la tabla de las soluciones simples del problema de las once damas. Los resultados hallados por nuestros dos colaboradores son idénticos. Existen 341 soluciones simples del problema de Las once damas, entre las cuales 12 son semi-regulares, lo que hace un total de 2.680 soluciones.

Tarry presentó en el congreso de Limoges (1890) las tablas de sus cálculos; por otra parte, envió la tabla de las soluciones que comienzan con 1 en el problema de las doce damas; halló 248 que corresponden a 124 soluciones simples. Además, dio las fórmulas que permiten calcular el número de posiciones que pueden ocupar las dos, tres, cuatro, cinco primeras damas, en el tablero de n^2 casillas. De este modo, en el tablero de 2 casillas de ancho y *n* casillas de altura, suponiendo $n > 4$, el número de posiciones de dos damas que no puedan comerse es igual a:

$$(n - 1)(n - 2)$$

En el tablero de tres casillas de ancho y *n* casillas de anchura, suponiendo $n>6$, el número de las posiciones de las tres damas que no puedan comerse es igual a:

$$(n - 3)(n^2 - 6n + 12)$$

En el tablero de cuatro casillas de ancho y *n* casillas de altura, suponiendo $n>8$, el número de posiciones de cuatro damas que no puedan comerse es igual a:

$$n^4 - 18n^3 + 139n^2 - 534n + 840$$

Para completar estas observaciones, agregaremos que ya publicamos sobre el tema que nos ocupa, desde el punto de vista de la ejecución práctica, sin ver el tablero, dos artículos en los números 697 y 701 de la publicación La Nature, de Gaston Tissandier. Pero, a pesar de tantos esfuerzos, la solución general del problema de las *n* damas está lejos de ser conocida; sin embargo, en una nota que termina el opúsculo del general Frolow[3], hemos demostrado que el número de soluciones ordenadas del problema de las n damas, por progresión aritmética, es igual a la función numérica

$$\frac{n^2}{abc...}(a-3)(b-3)(c-3)...$$

[3] *FROLOW, Los cuadrados mágicos, nuevo estudio, con Notas realizadas por DELANNOY y LUCAS, París, 1886.*

en la cual a, b, c ..., designan los diferentes factores primos que dividen a n.

[Se conoce ahora el número de soluciones para algunos tableros de lado mayor que 11. No se tiene aún una fórmula general.

Tablero	Nº de soluciones
12 x 12	14.200
13 x 13	73.712
14 x 14	365.596
15 x 15	2.279.184

Estos valores han sido tomados de *Ajedrez y matemáticas*, de Bonsdorff, Fabel y Riihimaa (Ediciones Martínez Roca, Barcelona, 1974). N. del E.]

Cuarta recreación
La numeración binaria

Al señor J. J. Sylvester, corresponsal del Instituto, profesor de la Universidad J. Hopkins, en Baltimore.

"La reflexión unida a la práctica produce ideas claras, y entonces se encuentran métodos abreviados en los cuales la invención halaga el amor propio, cuya pericia satisface el espíritu, y que hacen hacer con placer un trabajo ingrato en sí mismo."
J. J. ROUSSEAU, Confesiones

"La verdad a veces parece correr delante de quien la busca; a menudo no hay un momento de intervalo entre el deseo, la esperanza y el goce."
MONTESQUIEU, Rapport sur l'usage des Clandes Rénales

Contenido:

1. De la numeración

Consideramos habitualmente la numeración como la operación fundamental de la aritmética, como el principio de todas las operaciones que podemos efectuar con los números. Hay en esto una grave falta de lógica, ya que las propiedades de los números existen independientemente de todo sistema de numeración.

La numeración es un lenguaje puramente convencional, que permite decir y escribir los números por medio de otros, representados por las palabras en el habla y por cifras en la escritura. La operación fundamental de la aritmética es la ley de formación de los números, es decir la adición. La numeración decimal es una operación más compleja, que contiene a la vez la adición y la multiplicación; de este modo, por ejemplo, el número 45 representa en el sistema decimal el resultado de la multiplicación de cuatro por diez, v la adición posterior de cinco unidades. Sabemos, además, que esta numeración decimal es una creación relativamente tardía de la aritmética.

Sabemos que, en vez de contar los números por decenas, por centenas o grupos de diez decenas, por millar o grupos; le diez centenas, hubiéramos podido reemplazar el número diez por cualquier otro, por ejemplo, el doce. Ya Aristóteles había observado que el número cuatro podía reemplazar perfectamente al número diez; Weigel publicó, sobre el tema en 1687, el proyecto de una *Aritmética tetráctica*.

La elección casi unánime del número diez como base de la numeración deriva probablemente de la conformación de la mano. Asimismo, la mayoría de las unidades utilizadas por los pueblos antiguos provienen por lo común de las dimensiones del cuerpo humano: de este modo, por ejemplo, el pie, el codo, etc. En el siglo XVII. Melchisédec Thévenot buscó una medida universal en la regularidad y la igualdad de las celdillas del panal. Las nuevas medidas se establecen sobre bases más estables y provienen de las relaciones geodésicas, físicas, etc., como el *metro*, el péndulo.

2. Sistema binario

Todo sistema de numeración está entonces fundado en el empleo de unidades de diversos órdenes, de las cuales cada una contiene a la precedente un mismo número de veces. Ese número de unidades de cada orden, que es necesario para formar una unidad del orden siguiente, es llamado la base del sistema de numeración. Esta base debe ser por lo menos igual a dos; en efecto, si tomáramos el uno como base, las unidades de los diversos órdenes serían iguales entre ellas, y ya no existiría, hablando con propiedad, un sistema de numeración. Debemos a Leibniz el conocimiento de la aritmética binaria. En ese sistema, la base es el número dos, y podemos escribir todos los números con las cifras O y I. adoptando como única convención aquella análoga a la convención de la numeración escrita del sistema decimal, según la cual toda cifra colocada inmediatamente a la izquierda representa unidades dos veces más grandes. De este modo, en este sistema, los números dos, cuatro, ocho, dieciséis... se escriben:

10 100, 1000, 10000...,

Y los números tres, cinco, once, veintinueve, se escriben:

11, 101, 1011, 11101.

3. Sistema duodecimal

Simon Stevin, de Brujas (muerto en 1633), propuso en una oportunidad el sistema de *numeración duodecimal*, relacionándose mucho más con nuestra manera de contar los meses del año, las horas del día y los grados de la circunferencia; pero el cambio del sistema actual produciría una cantidad de inconvenientes superior a las pequeñas ventajas que podrían haber resultado de la elección de la base doce. Más tarde, Auguste Comte observó que la estructura de la mano, compuesta de cuatro dedos de tres falanges, o de doce falanges opuestas al pulgar, permitía representar, con los dos pulgares situados sobre dos falanges, todos los números hasta trece veces doce: en consecuencia, de este modo podríamos contar con las falanges, en el sistema duodecimal, con mayor facilidad y en el número mayor que contando con los dedos en el sistema decimal. Pero de este ingenioso sistema sólo conocemos actualmente la comparación hecha por Auguste Comte de los cuatro dedos y el pulgar con el pelotón de cuatro hombres y un capataz.

4. Ventajas del sistema binario

En este sistema, las operaciones comunes de la aritmética se reducen a su expresión más simple. Los resultados de la adición se reducen a esto: 1 y 1 hacen *dos*, pongo 0 y paso l. En cuanto a la tabla de Pitágoras, no existe aquí, sólo tenemos esto: 1 multiplicado por 1 da 1, de manera que la multiplicación se hace por medio del desplazamiento transversal del multiplicando. Para la división, no hay ningún tanteo. Además, este sistema se prestaría con mayor naturalidad que ningún otro a la confección de máquinas aritméticas, si no poseyéramos actualmente el admirable *Aritmámetra* de Thomas (de Colmar). Sin embargo, debo agregar que la numeración binaria me ha permitido hallar números primos mucho más grandes que los conocidos hasta el presente, y que de ella he deducido el proyecto de una máquina capaz de dar grandes números primos.[4] Pero este sistema es incómodo a causa de la gran cantidad de caracteres necesarios para representar un número un poco elevado.

He aquí un medio muy rápido indicado por Legendre en la Teoría de los Números, destinado a expresar un número grande con caracteres binarios. Sea, por ejemplo, el número 11182445; lo divido por 64, tengo el resto 21 y el cociente 174741; éste dividido por 64 da el resto 21 y el cociente 2730; finalmente, 2730 dividido por 64 da el resto 42 y el cociente 42; pero 21 se expresa en el sistema binario como 10101, y 42 como 101010. Así, el número propuesto se expresará mediante

101010 101010 010101 010101

5. El I-King

El sistema de numeración binaria da la explicación de un símbolo chino que lleva el nombre de *I-King* o *I-Ching* (libro de las mutaciones), atribuido a Fohi, el más antiguo legislador de China. Este símbolo está compuesto por 64 pequeñas figuras formadas, cada una, por seis líneas horizontales, algunas enteras, otras partidas por la mitad. Causó la desesperación de los eruditos chinos y de los sabios europeos, que no podían explicarlo de una manera satisfactoria, hasta que el ilustre Leibniz, comparando los diferentes caracteres del I-King a la sucesión de números escritos

[4] Ver mi memoria titulada: *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise, et sur diverses questions d'arithmétique supérieure*. Roma, 1877.

en el sistema binario, reconoció que este tipo de aritmética podía servir para interpretar el enigma, y que el I-King no era otra cosa que la sucesión de los primeros 64 números escritos en el sistema de numeración que tiene como base 2, pero con el orden natural invertido. En efecto, si representamos la unidad con un trazo horizontal simple ——, y el cero con un trazo partido — —; si, además, convenimos en escribir las unidades de diversos órdenes, ya no de derecha a izquierda sino de abajo hacia arriba; como además los ceros colocados a la izquierda de un número no cambian su valor, descubriremos que los caracteres chinos, compuestos por seis líneas horizontales y presentados a continuación, pueden interpretarse de la manera que aparece en la tabla.

CARACTERES CHINOS DEL I-KING	TRADUCCION EN EL SISTEMA BINARIO	VALORES BAJO LA FORMA HABITUAL
䷁	000000	0
䷗	000001	1
䷆	000010	2
䷒	000011	3
䷎	000100	4
䷣	000101	5

Leibniz veía además en este enigma que había descifrado con tanta felicidad, una imagen de la creación sacada de la nada por voluntad de Dios, del mismo modo que, decía, todos los números son engendrados, en el sistema binario, por el cero y la unidad. Esta idea le gustó tanto, que comprometió al padre Bouvet, misionero en China, a desarrollarla ante el emperador reinante para convertirlo al cristianismo. De ninguna manera pretendemos justificar esta aplicación dudosa de la ciencia a los misterios teológicos. Simplemente, la citamos como un documento curioso de la historia de la aritmética binaria y agregamos, junto con un sabio ilustre, que la idea de Leibniz era una idea pitagórica salida de la activa imaginación de este gran genio, y sobre la cual sin duda él no insistió más de lo necesario.

6. Las cajas con pesas

Daremos ahora la tabla de los primeros treinta y dos números escritos en el sistema binario.

1	1	9	1001	17	10001	25	11001
2	10	10	1010	18	10010	26	11010
3	11	11	1011	19	10011	27	11011
4	100	12	1100	20	10100	28	11100
5	101	13	1101	21	10101	29	11101
6	110	14	1110	22	10110	30	11110
7	111	15	1111	23	10111	31	11111
8	1000	16	10000	24	11000	32	100000

Es fácil continuar esta tabla todo lo que se quiera; vemos inmediatamente que un número cualquiera puede estar formado mediante la adición de los siguientes números:

1, 2, 4, 8, 16, 32...,

que representan, junto con la unidad, todas las potencias de dos.

Pero en esta adición, cada número sólo debe tomarse una vez. En otras palabras, un número entero cualquiera es una suma de potencias de dos, todas diferentes, admitiendo la unidad como potencia de exponente cero.

Esta propiedad podría ser utilizada en el comercio; así, para pesar un número entero de gramos, se puede emplear una caja que contenga cada una de las pesas siguientes:

1^{gr}, 2^{gr}, 4^{gr}, 8^{gr}, 16^{gr}, 32^{gr}... , Con seis pesas, podríamos pesar hasta 63 gr; n pesas podrían pesar hasta un número de gramos representados por la fórmula

$$2^n - 1$$

Pero las cajas se componen de manera bien diferente, ya que contienen las pesas:

1^{gr},	2^{gr},	2^{gr},	5^{gr};
1^{dg},	2^{dg},	2^{dg},	5^{dg};
1^{hg},	2^{hg},	2^{hg},	5^{hg};
1^{kg},	2^{kg},	2^{kg},	5^{kg};

y así sucesivamente. Vemos, en efecto, que con los números 1, 2, 2, 5, podemos formar, por adición, todos los números de 1 a 10. Estas cajas presentan la ventaja de estar más relacionadas con el sistema ordinario de la numeración decimal y, en consecuencia, la operación de pesaje no exige ningún esfuerzo mental; pero, hasta un límite cualquiera, necesitamos menos pesas en el sistema binario que en el sistema decimal.

Los números de la progresión triple

$$1, 3, 9, 27, 81,...,$$

tienen una propiedad análoga, que consiste en que agregándolos o suprimiéndolos de cierta manera, formamos todos los números enteros posibles. Esta propiedad notable se demuestra muy simplemente por medio del sistema de la numeración ternaria o de base 3, modificado por la introducción de caracteres negativos. De este modo, conviniendo en que un pequeño trazo de tarjado de una cifra ~~1~~, ~~2~~, ~~3~~..., expresa que el número indicado por medio de esa cifra con ese valor de posición debe ser suprimido, podemos escribir todos los números del sistema decimal con las cinco primeras cifras significativas 1, 2, 3, 4, 5, y el carácter 0. Por ejemplo, 6 será expresado por medio de ~~14~~, 7 por ~~13~~ y así sucesivamente. Si aplicamos esta consideración al sistema ternario, llegamos a escribir todos los números con los caracteres 1, y 0. De este modo, los números

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

pueden ser representados por los símbolos

1, 1~~1~~, 10, 11, 1~~11~~, 1~~1~~0, 1~~1~~1, 10~~1~~, 100

Podríamos también utilizar esta propiedad para el pesaje, repartiendo de manera conveniente las pesas de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}...., entre los dos platillos de una balanza, para evaluar, con el menor número posible de pesas diferentes, las masas que pueden expresarse en números enteros.

De este modo, con cuatro pesas de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, podremos pesar hasta 40 gr; con las cinco pesas de 1^{gr}, 3^{gr}, 9^{gr}, 27^{gr}, 81^{gr} podremos pesar hasta 121 gr. En general, con *n* pesas

$$1, 3, 3^2, 3^3, \ldots.\ 3^{n-1}$$

podremos sumar hasta un número de gramos representados por la expresión

$${}^{1}/_{2}(3^{n} - 1)$$

La progresión geométrica de razón 3 resuelve el problema enunciado por Labosne de la siguiente manera: *encontrar una serie de pesas con las cuales podamos hacer todos los pesajes en números enteros, desde 1 hasta la suma de las pesas empleadas, siendo esta suma la mayor posible en relación con el número de pesas*.

7. El abanico misterioso

Retornemos la tabla que hemos construido anteriormente y escribamos uno debajo del otro, en la primera columna de la derecha, todos los números cuya última cifra en el sistema binario sea la unidad; en una segunda columna, escribamos todos los números cuya segunda cifra, a partir de la derecha, en el sistema binario, sea la unidad; en una tercera columna, todos los números cuya tercera cifra, a partir de la derecha, sea la unidad, y así sucesivamente. Podemos detenernos en una columna cualquiera, en la quinta por ejemplo, y los números escritos se limitarán a 31, y, en general, en el caso de la n^{sima} columna, veremos que se limitan a 2^{n-1}. Hecho esto, presentamos la tabla a una persona cualquiera; le decimos que piense un número hasta 31, y que indique de inmediato en qué columnas aparece el número. Adivinamos fácilmente el número pensado escribiendo de inmediato y de derecha a izquierda 1 por cada columna en la que se encuentra escrito el número, y 0 por cada columna en la que el número no esté. De este modo tendremos representado el número elegido en el sistema de la notación binaria.

5	4	3	2	1
16	8	4	2	1
17	9	5	3	3
18	10	6	6	5
19	11	7	7	7
20	12	12	10	9
21	13	13	11	11
22	14	14	14	13
23	15	15	15	15
24	24	20	18	17
25	25	21	19	19
26	26	22	22	21
27	27	23	23	23
28	28	28	26	25
29	29	29	27	27
30	30	30	30	29
31	31	31	31	31
16	8	4	2	1

Tabla del abanico misterioso

Simplificamos el cálculo, escribiendo debajo de las columnas las potencias correspondientes del número 2. Estos números se escriben habitualmente sobre cartones dispuestos en *abanico*; para adivinar el número que ha pensado una persona, bastará con ofrecerle a la persona en cuestión un cartón después del otro, preguntándole si el número aparece en alguno; después, hay que hacer la suma de las potencias de dos inscriptas en la base de cada uno de los cartones donde se encuentra el número. Además, podemos hacer un juego semejante con las potencias de tres, pero será algo menos simple.

8. La progresión doble

En la tabla siguiente, ofrecemos los treinta y dos primeros números obtenidos de la duplicación constante del número precedente, a partir de 2; esos números forman las potencias sucesivas del número 2; en el sistema binario, escribimos estos números haciendo seguir la unidad de uno, dos, tres..., sesenta y cuatro ceros; en álgebra, hacemos seguir la cifra 2 por otra en pequeños caracteres, colocada arriba, llamada exponente, que indica cuántas veces ese número ha sido tomado como factor.

n	2^n	n	2^n
1	2	17	131 072
2	4	18	262 144
3	8	19	524 288
4	16	20	1 048 576
5	32	21	2 097 152
6	64	22	4 194 304
7	128	23	8 388 608
8	256	24	16 777 216
9	512	25	33 554 432
10	1 024	26	67 108 864
11	2 048	27	134 217 728
12	4 096	28	268 435 456
13	8 192	29	536 870 912
14	16 384	30	1 073 741 824
15	32 768	31	2 147 483 648
16	65 536	32	4 294 967 296

Tabla de las potencias de 2

Esta tabla representa lo que Fermat llamó *progresión doble*.

Observaremos que para multiplicar las potencias de 2, la novena y la undécima por ejemplo, basta con sumar los exponentes 9 y 11, lo que da 20, y de este modo tenemos:

$$2^9 \times 2^{11} = 2^{20}$$

ó

$$512 \times 2\,048 = 1\,048\,576$$

En general, el exponente del producto de dos potencias de un mismo número es igual a la suma de los exponentes de las dos potencias; asimismo, el exponente del cociente de dos potencias es igual a la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

La teoría logarítmica, como se sabe, se fundamenta en la observación y en la generalización de estas propiedades de Lis potencias. De este modo, si queremos calcular rápidamente la sexagésimocuarta potencia de 2, es necesario multiplicar por sí misma la trigésimosegunda potencia, lo que da:

$$2^{64} = 4\,249\,967\,296 \times 4\,249\,967\,296 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,616$$

Se dice que el inventor del juego del ajedrez pidió, como recompensa de su descubrimiento, un grano de trigo por el primer casillero del tablero, dos por el segundo, cuatro por d tercero, y así sucesivamente, siempre duplicando hasta el sexagesimocuarto, por el que tendría que recibir 2^{63} granos de trigo. Tenemos, a partir de una fórmula bien conocida en la teoría de las progresiones geométricas, y que podemos verificar en la tabla:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

En el ejemplo precedente, el número total de granos de trigo hubiera sido $2^{64} - 1$; es el número de veinte cifras que hemos escrito más arriba, y al que le hemos restado una unidad.

9. Los números perfectos

La progresión doble conduce al conocimiento de los números perfectos. Llamamos así a todo número entero que es igual a la suma de sus divisores, o preferiblemente, tal como podemos decido de otra manera, a la suma de sus partes alícuotas, prestando atención a que esta denominación excluye al número en cuestión de la serie de sus divisores. Además, llamamos número deficiente a todo número más grande que la suma de sus partes alícuotas; y número abundante al número menor que la suma de esas partes.

La teoría de los números perfectos impares no se conoce completamente; en cuanto a los números perfectos pares, están dados, sin excepción, por la fórmula

$$N = 2^{a-1}(2^a - 1)$$

en la cual el segundo factor debe ser un número primo; de este modo, en esta fórmula, no es necesario dar a *a* todos los valores enteros sino solamente todos aquellos para los que el número $P_a = 2^a - 1$ es primo. Esta regla era conocida por Euclides, pero ese geómetra no supo demostrar que de este modo podíamos obtener todos los números perfectos pares.

Vemos fácilmente que P a no puede ser primo salvo si el exponente a es también un número primo; pero eso no basta. Será necesario asegurarse de que 2^{a-1} es un número primo; se trata de una teoría muy difícil y, en el estado actual de la ciencia, la aritmética superior es impotente para resolver esta cuestión cuando el exponente a es un número primo superior a 100. Los números perfectos conocidos actualmente son los ocho números que aparecen en la tabla de la página siguiente.

En la segunda columna, no encontramos para a los valores 11, 23, 29; eso se debe a que los tres números

$$2^{11} - 1,\ 2^{23} - 1,\ 2^{29} - 1$$

no son primos, ya que son respectivamente divisibles por 23, 47 y 233.

Observaremos que los números perfectos terminan con una de las cifras 6 u 8; será siempre así, como podemos demostrar con facilidad. Eso se debe, por un lado, a la periodicidad de la última cifra en las potencias de dos y, por otro lado, a que los números primos a son necesariamente, a excepción del 2 y el 3, múltiplos de 6 aumentados o disminuidos en una unidad. De este modo, cuando *a* es un múltiplo de 6 disminuido en una unidad, el número N termina en 6, sin que sea necesario que *a* sea primo; cuando *a* es un múltiplo de 6 aumentado en una unidad, el número N termina en 8.

	a	2^{a-1}	$2^{a}-1$	NUMEROS PERFECTOS
1	2	2	3	6
2	3	4	7	28
3	5	16	31	496
4	7	64	127	8 128
5	13	4 096	8 191	33 550 336
6	17	65 536	131 071	8 589 869 056
7	19	262 144	524 287	137 438 691 328
8	31	1 073 741 824	2 147 483 647	2 305 843 008 139 952 128

Tabla de los números perfectos

11. Nota sobre los números perfectos

Hemos visto que los números perfectos provienen de los números primos de la forma

$$N = 2^n - 1$$

En el prefacio general de *Cogitata physico-mathematica*, Mersenne afirma que los números primos *N* corresponden a los valores:

$$n = 1, 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$$

y que no existe para n ningún otro n menor que 257. De este curioso pasaje, sacado a la luz por el señor Genocchi, resulta que Mersenne estaba en posesión de un método importante en la teoría de los números, pero este método no nos ha llegado. Al intentar verificar la aserción precedente, hemos reencontrado el teorema que sigue: *Si $n = 4q + 3$, es un número primo, al mismo tiempo que $2n + 1$, el número $N = 2^n - 1$ es divisible por $2n + 1$*. En consecuencia, consultando la tabla de los números primos, concluimos que para los valores de n. sucesivamente iguales a

11, 23, 83, 131, 179, 191, 239, 251,

el número N no es primo. Para otros valores del número primo *n*, Fermat encontró que 2^{37} -1 es divisible por 223; Plana ha descubierto que 2^{41} - 1 es divisible por 13.367; Landry encontró que los números 2^{43} - 1, 2^{47} - 1, 2^{53} - 1, 2^{59} - 1, son respectivamente divisibles por 431, 2351, 6361, y 179.951; finalmente. Le Lasseur demostró que para los exponentes *n*

73, 79, 97, 113, 151, 211, 223, 233

los números 2^n-l son respectivamente divisibles por:

439, 2 687, 11 447, 3 391, 18 121, 15 193, 18 287, 1 399.

Además, Seelhoff, de Bremen, demostró que 2^{26}-1 es primo, lo que da el noveno número perfecto.

Falta por tanto determinar la naturaleza de los números N para los veintitrés exponentes

67, 71, 89, 101, 103, 107, 109, 127, 137, 139, 149, 157,
163, 167, 173, 181, 193, 197, 199, 227,229, 241, 257.

Para verificar la última aserción de Mersenne sobre el supuesto número primo 2^{257}-1, que tiene 78 cifras, sería necesario, utilizando antiguos métodos, que la humanidad, formada por mil millones de individuos, calculara simultáneamente y sin interrupción, durante un tiempo por lo menos igual a un número de siglos representado por un número de veinte cifras. Hemos indicado en nuestra *Teoría de las funciones numéricas simplemente periódicas* (publicación de Silvestre, Baltimore, 1878), un nuevo método que permitiría a una sola persona resolver la cuestión en menos (le tres meses por medio del Aritmómetro de Thomas.

[La siguiente tabla tomada de *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Numbers*, de David Wells, 1987, muestra los nuevos valores de n. para los cuales $2^n - 1$ es primo. con indicación de autor y año del hallazgo.

n	*autor y año*
89	Powers, 1911
107	Powers, 1914
127	Lucas, 1876
521	Ordenador SWAC, 1952
607	Ordenador SWAC, 1952
1279	Ordenador SWAC, 1952
2203	Ordenador SWAC, 1952
2281	Ordenador SWAC, 1952
3217	Ordenador SWAC, 1952
4253	Ordenador SWAC, 1952
4423	Ordenador SWAC, 1952
9689	Ordenador SWAC, 1952
9941	Ordenador SWAC, 1952
11213	Universidad de Illinois, 1963
19937	Bryant Tuckerman, 1971
21701	Laura Nickel y Curt Noll, 1978
23209	Curt Noll, 1979
44497	Harry Nelson, David Slowinski, 1979
86243	Harry Nelson, David Slowinski, 1982
132049	1983
216091	Chevron Geosciences, 1985

El $2^{127} - 1$, descubierto por Lucas, utilizando métodos nuevos para la época, detentó hasta 1951 el récord de ser el mayor primo conocido. Recientemente fue superado con ayuda de ordenadores electrónicos; este número, de 39 dígitos, sigue siendo el mayor primo descubierto “a mano”. N. del E.

Quinta recreación
El juego de dominó

Al señor Dionys Ordinaire, diputado del Doubs.

“A veces juego al dominó en lo de Procope.
- A fe mía, es un hermoso juego, desarrolla el espíritu, Pues no es un hombre capaz de un quiproquo,
Aquel que con justeza sabe hacer dominó.”
ALFRED DE MUSSET

“Los placeres son amargos, cuando se abusa de ellos.
Es bueno jugar un poco,
Pero sólo si el juego nos divierte."
MME. DESHOULIERES

Contenido:

Se cree, generalmente, que el juego de dominó nos viene de los hebreos o de los griegos; la simplicidad de las disposiciones de este juego lleva a pensar que debe ser, en efecto, contemporáneo de las primeras edades de la civilización. Los etimologistas no se han puesto de acuerdo acerca del origen del nombre; unos lo atribuyen al parecido que tienen los dominós con la esclavina de los antiguos canónigos, hecha con una tela negra forrada de blanco: pero la interpretación más probable podría ser ésta: el juego de dominó estaba permitido antaño en los conventos y comunidades religiosas. Así, cuando un jugador ganaba la partida, al ser el primero en colocar la última ficha, profería una exclamación de alegría bendiciendo al Señor: *Benedicamus Domino*; o bien: *Domino gratias* (¡Gracias, Dios mío!), y de ahí viene, por abreviación, la palabra Dominó.

1. Definición

Los dominós son fichas que tienen la forma de un prisma rectangular cuyo ancho es el doble del espesor, y cuyo largo es el doble del ancho. Habitualmente, la parte inferior es de madera negra, de ébano; la cara superior, de hueso o de marfil, está dividida en dos cuadrados sobre los que están marcados los puntos. El juego se compone de veintiocho dominós que forman las combinaciones completas de siete números:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

tomados de dos en dos. Cada dominó se designa por los dos puntos que contiene; excepto el 0, llamado *blanca*, y el 1, llamado *as*; cuando los números son iguales, el dominó se llama *doble*.

Con frecuencia, representaremos los dominós de la siguiente manera:

06	16	26	36	46	56	66
05	15	25	35	45	55	
04	14	24	34	44		
03	13	23	33			
02	12	22				
01	11					
00						

Figura 15

Si se hace la suma de todos los puntos contenidos en el juego, se obtienen 168 puntos; luego, si se divide esta suma por el número de dominós, se obtiene el promedio de cada ficha, que es igual a seis, y sigue siendo la misma, si se restan todos los dobles.

A veces se encuentra en los comercios juegos completos de dominós que terminan en siete-doble, o en ocho-doble, o en nueve-doble. etc. En ese caso, se puede demostrar que el promedio de cada ficha es igual a siete, a ocho, a nueve, etc.; nos bastará con indicar el modo de demostración para el juego común, resultará fácil extenderlo enseguida a un juego completo cualquiera. En el juego que termina en seis doble, llamaremos *dominós complementarios* a dos dominós que pueden ser acoplados de tal suerte que los puntos contenidos en cada uno de los cuadrados del primero agregados respectivamente a los puntos contenidos en los cuadrados del segundo formen una suma igual a seis. Así, por ejemplo, el dos-cinco y el cuatro-as son complementarios; puede ocurrir que una ficha sea igual a su complementaria; eso sucede con cuatro fichas del juego común: la blanca-seis, el as cinco, el dos-cuatro y el tres-doble. Si se toman los complementarios de todas las fichas de un juego común, se forma, en otro orden, el mismo juego. La suma de los puntos de un juego y de su complementario es entonces igual a 12 veces el número de las fichas, y la suma de cada uno de ellos es igual a la mitad. o sea seis veces el número de las fichas. Por lo tanto, el promedio de los dominós es igual a seis y no cambia cuando se saca una ficha cuyos puntos suman seis, o dos fichas complementarias. De la misma manera, el promedio sigue siendo igual a seis, si no se tienen en cuenta los dobles.

Para el caso general, si suponemos que el juego termina en *n* doble, el número de los dominós es igual a

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Y el número total de puntos es igual a

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}$$

Este número representa el triple del número de balas de cañón de una pila triangular de n balas por lado. Daremos a este respecto los enunciados de los tres teoremas siguientes, los dos últimos de los cuales, barruntados en ocasión de una visita al arsenal de Rennes, en 1870, fueron el punto de partida de las investigaciones del autor sobre diversos aspectos de la teoría de los números.

- *TEOREMA I. El número total de los puntos de un juego completo de dominó nunca es igual al cuadrado de un número entero.*
- *TEOREMA II. El número total de balas de una pila de base cuadrada nunca es igual al cuadrado de un número entero, excepto el caso en que la pila contenga 1 o 24 balas por lado en la base.*
- *TEOREMA III. El número total de balas de una pila de base triangular nunca es igual al cuadrado de un número entero, excepto el caso en que la pila contenga 1, 2 o 48 balas por lado en la base.*

2. Las cuadrillas

Se puede agrupar los veintiocho dominós en disposiciones tales que cuatro puntos iguales estén puestos formando cuadrados. Estas figuras, que denominaremos cuadrillas de dominós, están compuestas por una primera franja horizontal que contiene cuatro cuadrados, luego dos franjas que contienen cada una tres cuadrados, y finalmente una franja de cuatro cuadrados. Todas ellas están encerradas en un perímetro que posee dos ejes de simetría; en otros términos, estas figuras se componen de dos partes que pueden ser aplicadas una sobre otra, sea por un pliegue horizontal, sea por un pliegue vertical; pero esto no sucede si se considera como parte integrante de la figura las líneas de separación que forman los bordes de los dominós.

Sin embargo, esta figura, abstracción hecha de los puntos que contiene, posee simetría alrededor de un eje vertical, es decir que se puede hacer coincidir las dos partes de la figura, aplicando la parte derecha sobre la izquierda.

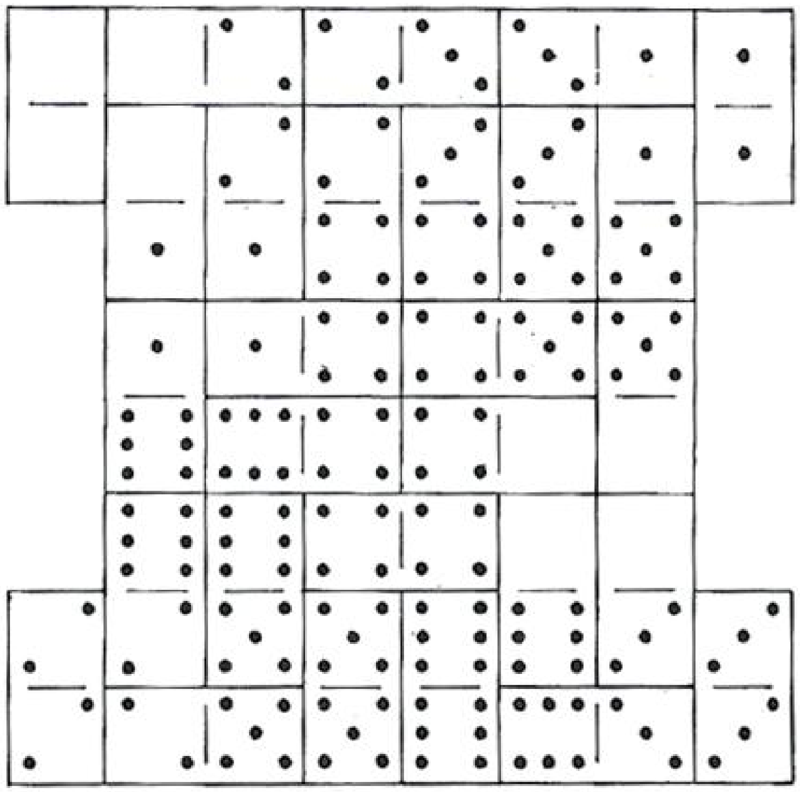


Figura 16

El propósito es encontrar todas las disposiciones posibles de los veintiocho dominós, en cuadrados de cuatro puntos iguales, que puedan ser encerrados en el perímetro que acabamos de indicar. Para resolver esta cuestión, nos serviremos de los numerosos e importantes datos que nos ha suministrado M. Delannoy, subintendente militar de 1ra clase, en Angouleme.

3. Las estructuras

En primer lugar, observaremos que para formar un cuadrado de cuatro puntos iguales se necesitan tres o cuatro dominós. Cuando se toman tres fichas, una de ellas debe ser un doble, y si no se toma en cuenta la orientación, los tres dominós forman, como es fácil vedo, tres configuraciones diferentes, A, B, C (Figura 17), que llamaremos tipos.

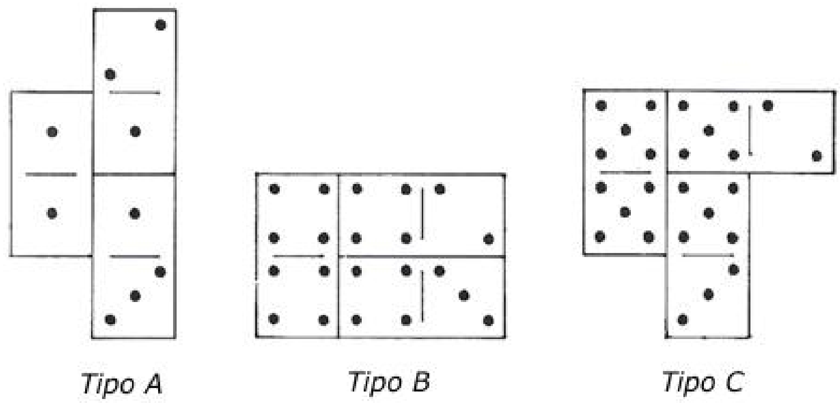


Figura 17. Los tipos de cuadrados de tres fichas

Cuando se emplean cuatro fichas, éstas forman, sin tomar en cuenta la orientación, cuatro configuraciones diferentes; D, E, F, G (Figura 18).

Según esto, es fácil ver que la configuración del perímetro de la Figura 16 es tal que los cuatro cuadrados de los ángulos o esquinas del perímetro son necesariamente del tipo C: en otros términos, las fichas de los cuatro ángulos son dobles.

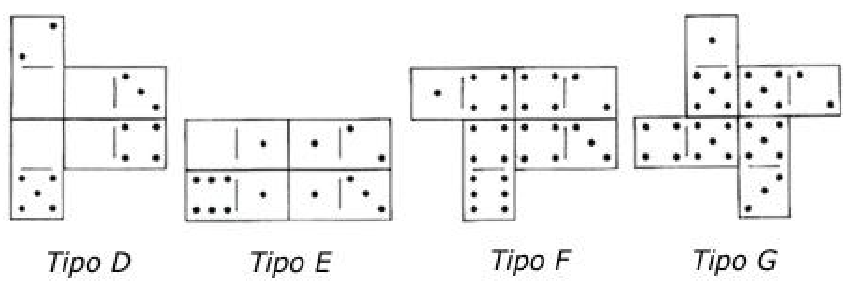


Figura 18. Los tipos de cuadrados de cuatro fichas

Expuesto esto, hay que determinar primero la disposición geométrica de los dominós, o más bien de sus bordes, independientemente del valor numérico atribuido a los puntos iguales de los catorce cuadrados; esta disposición será llamada estructura. Sin tener en cuenta las que se obtienen por inversión o por simetría, encontramos que las estructuras del primer perímetro pueden afectar cuatro formas diferentes. Comprometemos al lector a reproducir en una hoja de papel las diversas estructuras formadas por los bordes de los dominós. en tamaño natural, teniendo cuidado de indicar con sombreado o con un color cualquiera la ubicación de los siete dobles. Así será muy fácil darse cuenta de las diversas formas de las cuadrillas contenidas en una misma estructura.

Las figuras 16, 20, 21, 22, representan, haciendo abstracción de los puntos de los dominós. e indicando la ubicación de los siete dobles, las cuatro estructuras diferentes que se puede obtener dentro del mismo perímetro. Se observará que la primera estructura es simétrica respecto de un eje horizontal, y la segunda respecto de un eje vertical; la tercera y la cuarta son asimétricas.

4. Notación de las cuadrillas

Para representar las diversas soluciones simples de las cuadrillas de dominós, nos serviremos de una tabla indicadora de la posición respectiva de los catorce cuadrados de puntos en el orden siguiente:

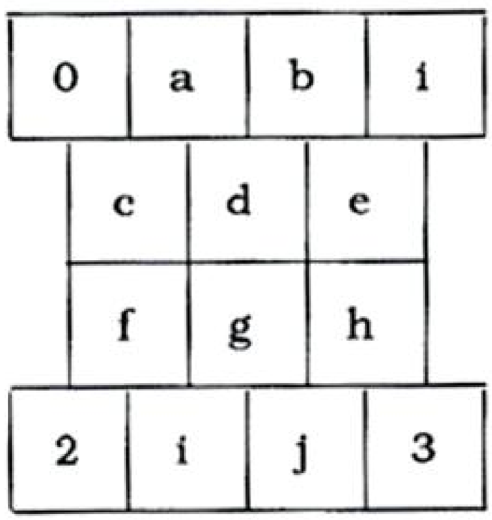


Figura 19. La notación

Las cuatro esquinas serán siempre designadas por 0, 1, 2, 3; la primera de las letras a, b, e, d,..., que no sea 0, 1, 2 o 3 será designada por 4; la siguiente será designada por 5, y el último punto por 6. Así la Figura 12 tiene, en la primera estructura, la notación:

0	-	2	-	3	-	2
	1	-	4	-	5	
	6	-	4	-	0	
2	-	5	-	6	-	3

Cuando la estructura es simétrica, como la primera, se obtendría una nueva disposición leyendo los puntos de derecha a izquierda, pero dándoles los signos convencionales; de este modo, la notación precedente escrita en el orden inverso

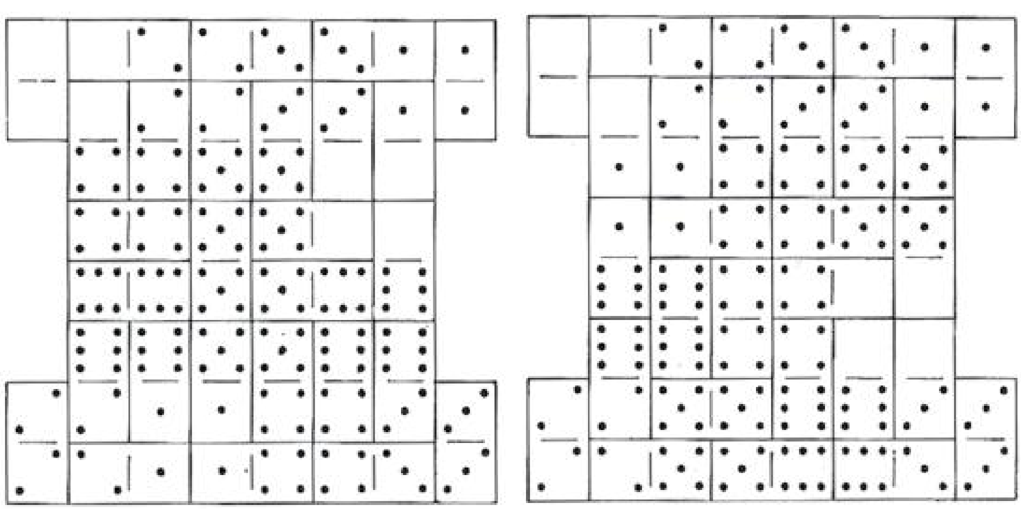
1 - 3 - 2 - 0 5 - 4 - 1 0 - 4 - 6 3 - 6 - 5 - 2	se convierte en	0 - 2 - 3 - 1 4 - 5 - 0 1 - 5 - 6 2 - 6 - 4 - 3

Pero consideraremos la primera notación y su simétrica como una sola solución simple.

Para la segunda estructura, se obtiene una solución simétrica invirtiendo el orden de las líneas horizontales; pero, también en este caso, contaremos las dos soluciones como una sola, y no conservaremos más que la solución designada por la notación más pequeña en el orden a b e d e f g h i j.

5. Tabla de las soluciones simples

Después de una exhaustiva discusión, que no corresponde detallar aquí, M. Delannoy ha compuesto la tabla de las soluciones simples para las estructuras representadas en las figuras 16, 20, 21 y 22.



Figuras 20 y 21

La primera estructura, simétrica con respecto a un eje vertical (Figura 16), encierra ocho soluciones simples:

0-2-3-1	0-2-4-1	0-2-4-1	0-2-4-1
1-4-5	1-3-5	1-5-6	1-5-6
6-4-0	6-4-0	3-4-0	3-5-0
2-5-6-3	2-5-6-3	2-6-5-3	2-6-4-3

0-2-4-1	0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1
3-5-0	1-3-2	1-6-2	1-6-2
1-5-6	6-5-0	3-5-0	3-6-0
2-6-4-3	2-4-6-3	2-4-6-3	2-4-5-3

La segunda estructura, simétrica con respecto a un eje horizontal (Figura 20), da cuatro soluciones simples:

0-2-3-1	0-2-3-1	0-3-2-1	0-3-4-1
4-5-0	4-5-4	4-5-0	5-6-0
6-5-6	6-5-6	6-5-6	4-6-2
2-1-4-3	2-1-0-3	2-4-1-3	2-5-1-3

La tercera estructura, asimétrica (Figura 21), da catorce soluciones simples:

0-2-3-1	0-2-3-1	0-2-4-1	0-2-4-1	0-3-2-1
1-4-5	1-4-5	1-3-5-	1-3-5	4-5-0
6-4-0	6-4-6	6-4-0	6-4-6	6-5-6
2-5-6-3	2-5-0-3	2-5-6-3	2-5-0-3	2-4-1-3

0-3-4-1	0-3-4-1	0-4-2-1	0-4-3-1	0-4-5-1
5-6-0	5-6-0	5-3-0	1-5-2	1-3-2
4-5-2	4-6-2	6-4-6	6-5-0	6-5-0
2-6-1-3	2-5-1-3	2-5-1-3	2-4-6-3	2-4-6-3

0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1
3-6-0	3-6-0	6-3-0	6-3-0
5-4-2	5-6-2	5-4-2	5-6-2
2-6-1-3	2-4-1-3	2-6-1-3	2-4-1-3

La cuarta estructura, asimétrica (Figura 22), encierra ocho soluciones simples:

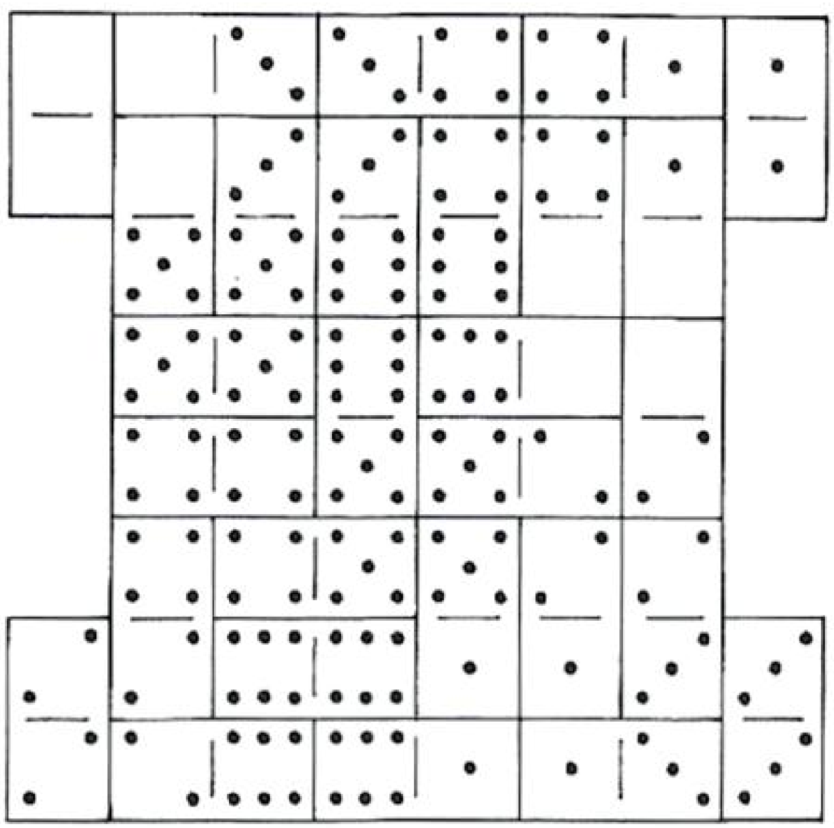


Figura 22

0-3-4-1	0-3-4-1	0-4-3-1	0-4-3-1
5-6-0	5-6-5	5-6-0	5-6-5
4-5-2	4-0-2	4-1-2	4-1-2
2-6-1-3	2-6-1-3	2-6-5-3	2-6-0-3

0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1	0-4-5-1
6-3-0	6-3-0	6-3-6	6-3-6
4-1-2	5-6-2	4-1-2	5-0-2
2-5-6-3	2-4-1-3	2-5-0-3	2-4-1-3

6. Multitud de cuadrillas

Las tablas precedentes corresponden a las *treinta y cuatro* soluciones simples obtenidas por Delannoy. Este problema había sido tratado anteriormente por Laquiêre, pero las notas sobre el tema se perdieron durante el sitio de Estrasburgo. Este número se reduciría mucho, si no se prestara atención a la forma interior de las estructuras, dado que en las tablas precedentes se encuentran varias soluciones que tienen una notación común.

Adoptando el número de 34 soluciones simples, es evidente que en cada una de ellas se puede intercambiar dos puntos cualesquiera: el dos por el cinco, o el as por el blanco. etc.; con más generalidad, reemplacemos las cifras de la notación

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,

por los siete puntos

5, 3, 0, 1, 2, 6, 4,

tomados en un orden cualquiera. De este modo, obtendremos cuadrillas diferentes. Cada solución simple permite entonces tantas cuadrillas como maneras haya de disponer siete objetos diferentes en línea recta. Más precisamente, el número de permutaciones rectilíneas de siete objetos:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 5\,040$$

Calculando el producto de 5040 por 34 (número de soluciones simples), y duplicando el resultado, para tener en cuenta las soluciones obtenidas por simetría, se alcanza un total de

342 720

cuadrillas diferentes para el perímetro considerado.

7. La variedad de los perímetros

En lugar de ordenar los dominós en cuadrillas, según el perímetro que hemos considerado (figuras 16, 20, 21 y 22), podemos proponemos resolver el mismo problema con otros perímetros. Así, el perímetro de la Figura 23 no permite más que una sola estructura con un eje vertical de simetría; por otra parte, esta estructura no permite más que una solución, que hemos representado en la misma figura.

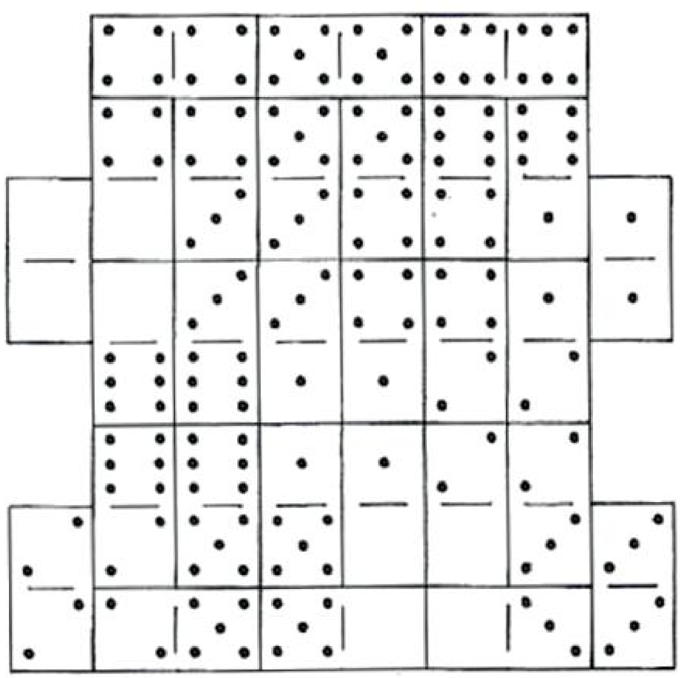


Figura 23

Las figuras 24 y 25 representan dos nuevas estructuras de igual perímetro. Delannoy ha estudiado todas las soluciones simples de estas figuras. Además, ha demostrado que sólo existen otras dos estructuras para el mismo perímetro; pero éstas no proporcionan soluciones.

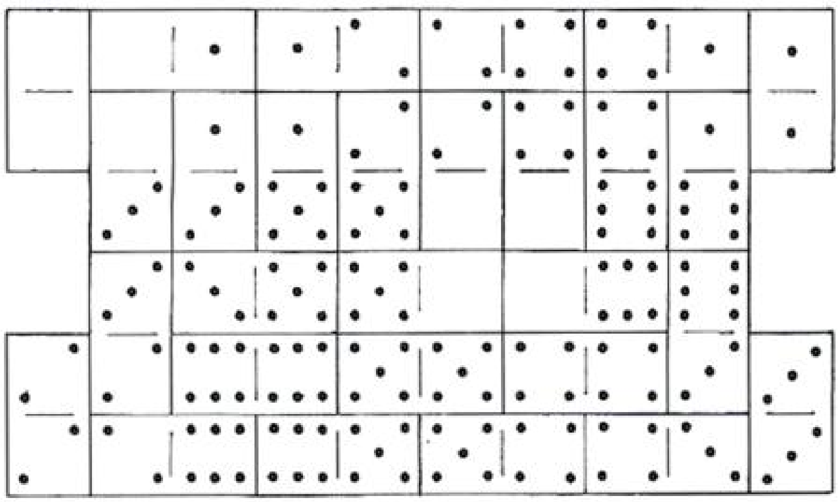


Figura 24

La sexta estructura, que posee un eje vertical de simetría, brinda, junto a la solución representada (Figura 24), estas otras *diez*:

0-1-2-4-1 5-3-0-6 2-6-5-4-3	0-1-3-2-1 4-5-0-6 2-5-6-4-3	0-1-3-4-1 5-6-0-2 2-6-4-5-3	0-1-4-2-1 3-5-0-6 2-5-6-4-3
0-1-4-5-1 6-3-0-2 2-4-6-5-3	0-3-2-4-1 1-5-0-6 2-6-5-4-3	0-3-2-4-1 5-1-0-6 2-6-5-4-3	0-3-4-5-1 6-1-0-2 2-4-6-5-3
	0-4-2-5-1 1-3-0-6 2-6-4-5-3	0-4-2-5-1 3-1-0-6 2-6-4-5-3	

En cuanto a la séptima estructura (Figura 25), posibilita ocho soluciones.

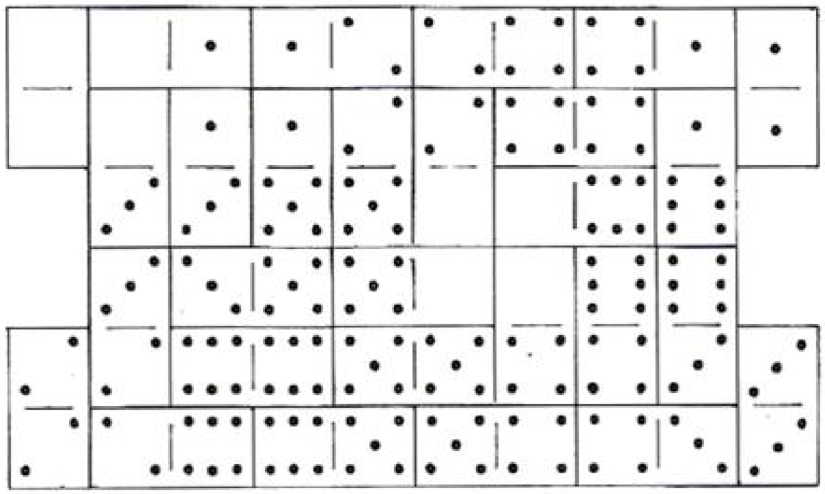


Figura 25

Las notaciones de estas soluciones son, aparte de la que corresponde a esta figura, idénticas a la primera y las seis últimas de la tabla precedente.

8. Disposiciones rectilíneas

Podemos proponernos determinar el número de disposiciones rectilíneas que permiten ordenar todas las fichas de un juego completo de dominó, siguiendo la regla usual. Este problema ha sido enunciado en los *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. VIII, p. 74), Y resuelto por Reiss.[5] La regla del juego exige que dos fichas consecutivas se toquen por puntos iguales. De ahí se concluye que el elemento inicial es el mismo que el final; en otros términos, si el juego comienza con un cinco, terminará necesariamente con un cinco, a menos que se lo cierre sin haber empleado todos los dominós. En efecto, toda combinación rectilínea de las veintiocho fichas conforme a la regla no cambiará si se descartan los dobles. Hecha esta reducción, cada punto formará parte de seis dominós, puesto que está combinado con cada uno de los otros seis; en consecuencia, el punto inicial debe encontrarse en otros cinco lugares de la combinación. Pero, en el interior de ésta, cada punto se presenta dos veces seguidas, como segunda parte de una ficha y

[5] *Evaluation du nombre de combinaisons desquelles les 28 dés d'un jeu du domino sont susceptibles d'après la regle de ce jeu*, por el Dr. M. Reiss, de Francfurt. (*Annali di Matematica pura ed applicata*, t. V, pp. 63-120, Milán, 1871.)

como primera parte de la ficha siguiente; el elemento inicial no podrá aparecer entonces más que cuatro veces, y finalmente se encontrará en un lugar donde no podrá ser seguido por él mismo, es decir, en el otro extremo de la combinación.

9. Un pasatiempo simple

Se observará que la demostración precedente se aplica a todos los juegos de dominó que terminen en cuatro-doble o seis-doble u ocho-doble, en una palabra en un doble *par*. De la misma manera, se puede demostrar que ella no es aplicable cuando el juego termina en tres-doble o cinco-doble o siete-doble, en una palabra en un doble *impar*. En este caso ya no se pueden formar disposiciones rectilíneas según la regla, utilizando todas las fichas.[6]

Asimismo, si se retira de un juego ordinario (o, en general, de un juego que termine en un doble par) una ficha cualquiera, siempre que ésta no sea un doble, el tres-cinco por ejemplo, la disposición rectilínea formada con todas las otras fichas, según la regla, tendrá en uno de sus extremos un tres. y en el otro un cinco. De este resultado se deduce un pasatiempo bastante interesante.

Dé la vuelta a todas las fichas de un juego de dominó, teniendo cuidado de escamotear una que no sea doble. Enseguida pida a alguien que saque una ficha al azar y la muestre, y luego, que vaya descubriendo los otros dominós para disponerlos paulatinamente según la regla, sin cerrar el juego y sin tener en cuenta los dobles. Entonces usted predecirá los dos extremos de la combinación, de acuerdo a los puntos de la ficha que haya escamoteado. Si la persona no conoce este entretenimiento, usted podrá intrigarla mucho simulando que hace un cálculo

---

[6] Cuando el juego de dominó se compone de todas las combinaciones completas de los puntos de 0 a (2n - 1), cada uno de los puntos, *excluyendo los dobles*, se encuentra repetido (2n - 1) veces. Entonces, toda vez que un punto distinto del inicial se haya repetido (2n - 1) veces, será imposible colocar un nuevo dominó, porque no quedará otro dominó con ese punto. En cuanto al punto inicial, podrá repetirse (2n - 1) veces, sin cerrar el juego. En consecuencia, el número máximo de puntos que se puede colocar de acuerdo a las reglas del juego, excluyendo los dobles, comprenderá dos puntos, los puntos extremos, repetidos (2n - 1) veces, y los otros puntos, en número de (2n-2), repetidos (2n-2) veces. Este número máximo será entonces

$$2(2n - 1)+(2n - 2)^2;$$

el número máximo de los dominós que componen la disposición rectilínea es la mitad del precedente o

$$2n^2 - 2n + 1$$

siendo el número total de dominós, sin los dobles, igual a n(2n - 1), quedando siempre un resto de por lo menos (n - 1) dominós.

Con la sola excepción de n = 1, es decir en el caso en que la disposición rectilínea no comprende más que al único dominó blanca-as. (Nota de Delannoy] complicado en el momento en que ella le muestra el primer dominó.

Si usted repone hábilmente la ficha que ha escamoteado, mezclando los dominós, puede empezar de nuevo el entretenimiento; pero ahora siga el precepto de Bachet: "Prevengo a aquellos que quieran poner en práctica estos juegos y complacerse con ellos, que tomen la precaución de realizados con tal destreza que no se pueda descubrir fácilmente el artificio; pues lo que maravilla al espíritu humano es un efecto admirable del que ignora la causa. Por esto, si se realiza varias veces seguidas el mismo juego, es preciso dotado siempre de alguna variedad".

10. La memoria de Reiss

Para determinar el número de las disposiciones rectilíneas, Reiss considera, en su *Memoria*, las combinaciones circulares. Para obtenerlas, se puede partir de una disposición rectilínea cualquiera, que se repliega sobre sí misma de manera tal que las fichas ubicadas en los dos extremos acaban por tocarse en su parte exterior. En estas combinaciones circulares, todos los puntos se presentarán dos veces seguidas en tres oportunidades. Ya no poseen fichas extremas, de modo que se puede tomar cada ficha como inicial. Pero, al igual que en las disposiciones rectilíneas, se debe tener en cuenta el sentido, sea de derecha a izquierda, sea de izquierda a derecha, en el que los dominós se suceden.

Cuando se ha obtenido una combinación circular que no contenga ningún doble, se puede intercalar cada uno de ellos en tres lugares diferentes. Si C designa el número de combinaciones circulares distintas sin dobles, la inclusión de un primer doble, de la blanca-doble por ejemplo, dará el triple de combinaciones distintas o 3C; de la misma manera, la inclusión de un nuevo doble, el as-doble, triplicará el número anterior, y así sucesivamente. En consecuencia. el número de combinaciones circulares con dobles se obtiene triplicando siete veces seguidas el número de combinaciones circulares de las que los dobles fueron excluidos; este número es entonces

$$3^7C = 2\ 187 \times C.$$

Consideremos ahora una cualquiera de estas combinaciones circulares de 28 dominós; eligiendo sucesivamente cada una de las 28 fichas como inicial, resultarán 28 combinaciones rectilíneas distintas; de donde se concluye que el número total de estas últimas equivale a 28 37C. Así, Reiss vuelve a plantear la cuestión de encontrar el número de disposiciones circulares sin dobles.

Los desarrollos del autor comprenden 58 páginas, entre las que se hallan numerosas tablas numéricas; nosotros no hemos podido verificar estos cálculos, demasiado complicados para ser interesantes; el problema queda sin resolver, pues lo importante sería encontrar una fórmula independiente o una ecuación de recurrencia que diera el número de disposiciones para un juego de dominós que termine en un doble-par, cualquiera sea. De todas formas, y pese a que por otros motivos supongamos que hay alguna inexactitud, indicaremos los resultados del análisis del doctor Reiss. El número C de combinaciones circulares sería:

129 976 320,

el de combinaciones rectilíneas

7 959 229 931 520,

y se podría duplicar estos dos números, si no se tuviera en cuenta el sentido.

11. Hasta el cuatro doble

Nosotros vamos a indicar otro método de enumeración de las combinaciones rectilíneas, sin pasar por las disposiciones circulares, pero suponiendo que el juego termina en cuatro doble. Como en el método de Reiss, suprimimos los cinco dobles 00, 11, 22, 33, 44; luego bastará con multiplicar el número de disposiciones rectilíneas distintas por 24 x 3 = 48, porque uno de los dobles puede ocupar tres posiciones, dentro de la línea, o en uno de los dos extremos.

Además, consideraremos como distintas dos combinaciones rectilíneas sólo porque difieren en el orden de sucesión de las fichas, ya sea dispuestas de derecha a izquierda, ya de izquierda a derecha. Si se escriben, en el sentido ordinario de izquierda a derecha, los puntos de los dominós de una disposición rectilínea, cada punto se hallará repetido dos veces consecutivamente, con excepción del primero y del último; para simplificar, escribiremos una sola vez dos puntos consecutivos, y suprimiremos el último punto igual al primero. En consecuencia, la notación de una disposición rectilínea estará formada por una serie de diez cifras que contiene dos veces cada una de las cifras 0, 1, 2, 3, 4; por otra parte, la vecindad de dos cifras cualesquiera, por ejemplo 1 y 3, deberá presentarse una y sólo una vez, considerando vecinas también la primera y la última.

Así, por ejemplo, la notación

0 1 2 0 3 1 4 2 3 4,

representa una disposición rectilínea formada sucesivamente por blanca-as. as-dos, dos-blanca..... tres-cuatro, cuatro-blanca. Es evidente que de una disposición rectilínea se puede deducir un cierto número de otras, permutando de cualquier modo los puntos

0, 1, 2, 3, 4, 5;

pero las disposiciones así obtenidas no serán siempre distintas.

Es posible entonces buscar las soluciones elementales, es decir todas aquellas soluciones que permitan obtener otras por permutación de los elementos

0, 1, 2, 3, 4.

Para atenernos a una numeración convencional, podemos designar con 0 el primer punto, con 1 el siguiente, de modo tal que el primer dominó será 01. Si designamos con 2 el punto siguiente, tenemos que las tres primeras cifras de la solución elemental son necesariamente 012.

El cuarto punto puede ser igual al primero, o representar un punto nuevo que designaremos con 3. Continuando esta discusión, encontramos con bastante facilidad las *veintidós* notaciones siguientes, dispuestas en el orden numérico:

I	0120314234	XII	0123140342
II	0120314324	XIII	0123142034
III	0120324134	XIV	0123142043
IV	0120324314	XV	0123143024
V	0120341324	XVI	0123143042
VI	0120342314	XVII	0123402413
VII	0123024134	XVIII	0123403142
VIII	0123024314	XIX	0123413024
IX	0123041342	XX	0123413042
X	0123043142	XXI	0123420314
XI	0123140243	XXII	0123420413

Si se invierte el orden de las cifras de cualquiera de estas notaciones, dándole a los puntos la numeración convencional que hemos indicado, se recae necesariamente en una de estas notaciones; pero debemos distinguir dos casos. En el primer caso, la notación invertida y numerada reproduce la misma notación; diremos entonces que esta notación es simétrica. En el segundo caso, se reproduce otra; diremos entonces que es asimétrica.

Las notaciones simétricas son seis, a saber:

I, IV, XI, XVI, XX, XXII;

las notaciones asimétricas son las siguientes:

II, V, VI, IX, X, XII, XVII, XVIII,

y tienen por inversas respectivamente a:

III, VII, VIII, XIII, XV, XIV, XXI, XIX.

Expuesto esto, es fácil determinar la multitud de combinaciones rectilíneas distintas, sin tener en cuenta los dobles. El número de permutaciones de cinco objetos es igual a:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120.$$

Cada notación simétrica da 120 disposiciones distintas; cada notación asimétrica y su inversa dan 240 disposiciones distintas; en total,

$$\left(\frac{6}{2}+8\right)240 = 2640$$

En consecuencia, el número total de disposiciones rectilíneas del juego de dominó terminado en cuatro-doble es

$$2\,640 \times 48 = 126\,720$$

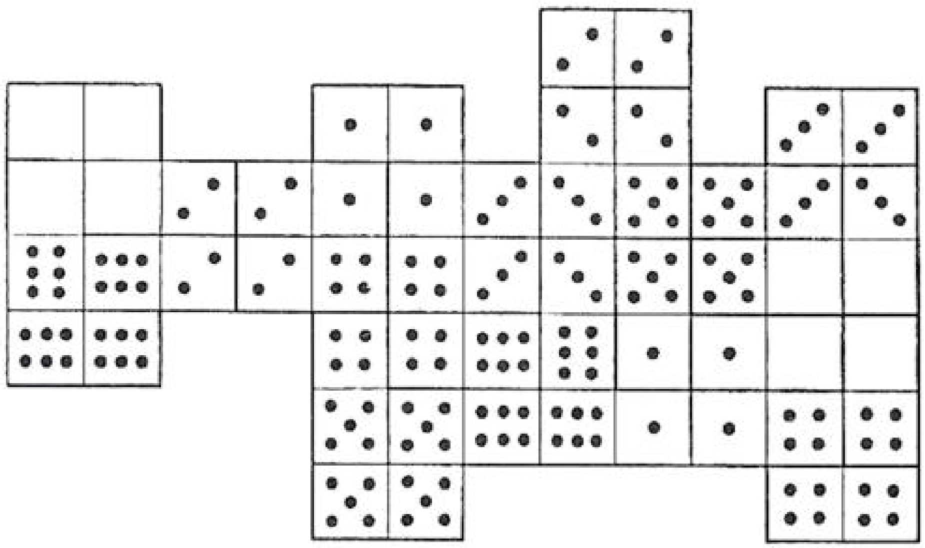
Desarrollando este método, se llegaría fácilmente a otra solución del problema de Reiss.

12. Nota sobre el juego de dominó

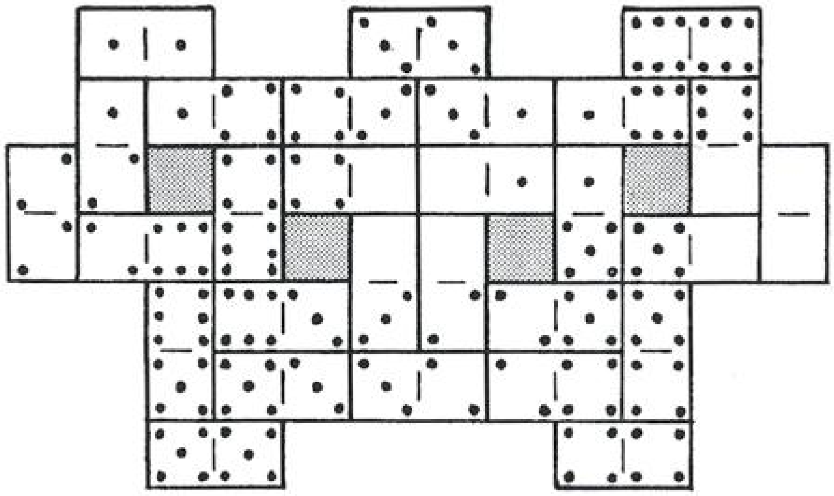
Si se considera un heptágono cuyos vértices sean designados con las cifras O, 1, 2, 3, 4, 5, 6, Y si se trazan todas las diagonales, el conjunto formado por los lados y las diagonal es del heptágono constituye la representación gráfica del juego común de dominó suprimiendo los dobles. A toda disposición de los dominós, según la regla del juego, corresponde un trazo continuo y, en consecuencia, cualquier problema del dominó común remite a un problema sobre trazado de figuras de un solo trazo. El sistema formado por el heptágono y sus diagonales no presenta más que puntos pares, y puede ser descrito de un solo trazo continuo que corresponde a una disposición rectilínea del juego de dominó. El problema de Reiss remite entonces al de determinar el número de maneras diferentes de describir con un solo trazo continuo el conjunto de los lados y de las diagonales del heptágono.

Asimismo, si se toma un cierto número de dominós del juego completo, se podrá saber si, con todos esos dominós, es posible formar una disposición rectilínea; para ello, habrá que figurarse los dominós en el heptágono; la disposición rectilínea existirá si la figura correspondiente contiene 2 puntos impares o ninguno.

[El autor holandés Fred Schuh hizo un estudio detallado del juego de cuadrillas, iniciado por Lucas. En su libro *The Master Book of Mathematical Recreations* (Dover Publications, Nueva York, 1968, traducción del original de 1943) propone también nuevos desafíos; así, la siguiente figura muestra su solución para el perímetro de mayor cantidad de ángulos.



Wade E. Philpott, de EE.UU., extendió el problema a juegos de dominó de hasta 66 fichas (llegando al 10-doble). Sus trabajos aparecieron en *Recreational Mathematics Magazine*, 1964. Los lectores de esa publicación propusieron, a continuación, nuevas figuras, agujereadas, tal como lo refiere Joseph Madachy en *Mathematics on Vacation* (Charles Scribner's Sons, Nueva York, 1966). La siguiente figura muestra una solución simétrica con 4 agujeros, conseguida por James E. Storer. N. del E.]



Sexta recreación
El juego de los mosaicos

A Herui Delannay, ex alumno de la Escuela Politécnica, subintendente militar de 1ª clase.

"Las Matemáticas tienen invenciones muy sutiles, que pueden servir mucho, tanto para contentar a los curiosos como para facilitar todas las artes y disminuir el trabajo de los hombres."
DESCARTES, Discurso del método

Contenido:

1. Historia

Los antiguos, que poseían en un grado superior el sentido práctico de la vida, no descuidaban nada que pudiera hacer de sus niños hombres sagaces e ingeniosos. En las *Leyes* de Platón, se puede leer un pasaje notable, relativo a la gimnasia intelectual a la que es preciso someter la inteligencia de los niños. Dice allí que hay que ejercitarlos en una multitud de pequeños cálculos a su alcance como, por ejemplo, compartir con una cantidad más o menos grande de compañeros, un cierto número de manzanas o de coronas, de tal suerte que se vean forzados, sin dejar de jugar, a recurrir a la ciencia de los números. Es evidente, en efecto, que los niños en sus juegos desarrollan la facultad de contar, de comparar, de sumar, de dividir y que, así, llegan a familiarizarse con los números.[7]

Entre estos entretenimientos mezclados con combinaciones, hay que incluir sin duda la construcción de mosaicos, que exige una gran habilidad, experiencia y un cierto conocimiento de los números. Los antiguos amaban la variedad y, si en sus casas no tenían todos mosaicos compuestos y acabados como verdaderas pinturas, querían al menos que el artesano fuera 10 bastante hábil como para variar al infinito los diseños del embaldosado. Estos eran de una diversidad de la que apenas podemos hacernos una idea, y sin embargo sólo empleaban un número relativamente pequeño de baldosas blanquinegras. Cada baldosa, dividida por una diagonal en dos partes, una blanca, la otra negra, podía colocarse en cuatro posiciones diferentes. Se tomaban, por ejemplo, 196 baldosas, y el número de combinaciones que podía ofrecer la manera de colocarlas y de agruparlas llegaba a ser casi infinito. De los mosaicos que han sido conservados, muchos están compuestos según este sistema. No parece imposible que los niños se divirtieran y se ejercitaran en estas mil combinaciones, por medio de fichas semejantes a estas baldosas.

2. El juego de los mosaicos

Las Memorias de la Academia Real de Ciencias de París del año 1704 contienen una “Memoria sobre las combinaciones” del R. P. Sébastien Truchet; comienza así: “En el último viaje que hice al canal de Orleáns, por orden de Su Alteza Real, encontré en un castillo llamado *La Motte Saint-Lyé*, a cuatro leguas de Orleáns, varias baldosas de loza cuadradas y divididas en dos colores por una línea diagonal, que estaban destinadas a una capilla y otras dependencias. Para poder formar diseños y figuras agradables con la colocación de estas baldosas, examiné primero de cuántas maneras pueden ensamblarse dos de ellas, disponiéndolas siempre en damero".

Y más abajo: “Consultamos los libros de arquitectura civil, y los que tratan de las

[7] Este párrafo ha sido tomado de la obra *Les Jeux des ancíens*, de Becq de Fouquieres.

combinaciones, para saber si alguien ya había hecho las mismas observaciones que nosotros; pero no encontramos nada que se le parezca".

Nosotros debemos señalar que han sido hallados en las excavaciones de Herculano y de Pompeya, muchos mosaicos compuestos de la misma manera; a continuación indicaremos algunos de ellos, por medio de una notación muy simple. Además, hemos encontrado, en nuestras visitas al Batisterio de Florencia y a algunos otros monumentos de Italia, embaldosados del mismo género.

3. Enumeración de los mosaicos

Si con una diagonal se divide un cuadrado en dos partes, una blanca y la otra negra, el cuadrado obtenido puede tomar cuatro posiciones que difieren sólo por la orientación, y que son representadas en la Figura 26; están numeradas como los cuadrantes, según el orden ordinario.

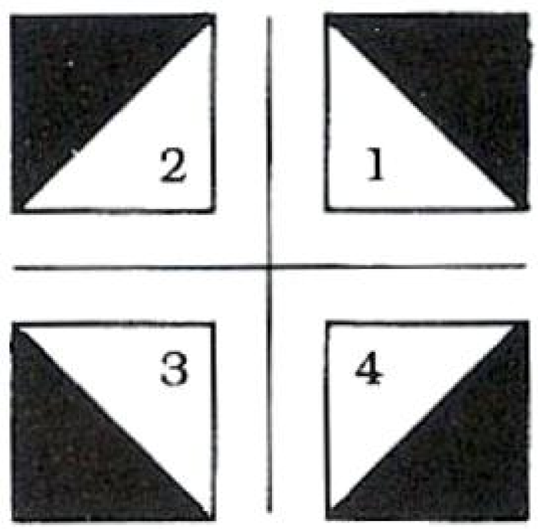


Figura 26

Estos cuatro cuadrados tomados de dos en dos y yuxtapuestos sobre una misma línea, pueden tomar dieciséis disposiciones diferentes, que representan las combinaciones completas de cuatro objetos tomados de dos en dos; estas disposiciones están anotadas numéricamente en el siguiente cuadro:

1	12	13	14
1	22	23	24
1	32	33	34
1	42	43	44

Pero, si no se consideran distintas dos disposiciones que no difieren más que por el orden de los dos cuadrados, por ejemplo las disposiciones 23 y 32, sólo se obtienen *diez* figuras; es el número de las fichas del dominó, desde el as-doble hasta cuatro-doble; en otros términos, es el número de las combinaciones completas de cuatro objetos tomados de dos en dos.

Podemos proponernos determinar el número de disposiciones que es posible formar con un cuadrado hecho de cuatro baldosas yuxtapuestas. Para obtenerlas, basta con escribir, debajo de una disposición de dos baldosas, cualquiera de las dieciséis disposiciones; así, por ejemplo, Figura 27.

En consecuencia, el número de cuadrados diferentes formados por cuatro baldosas es igual a dieciséis veces dieciséis o *doscientos cincuenta y seis*.

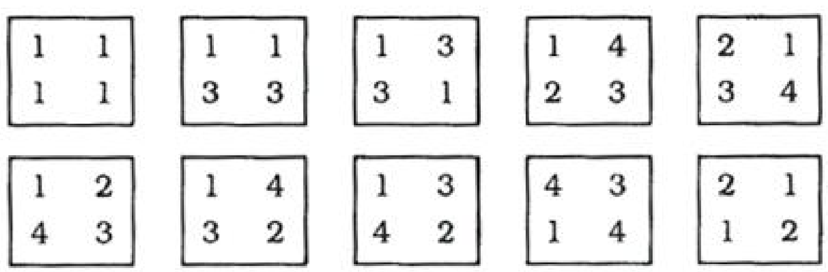


Figura 27

Es precisamente el número de combinaciones completas de cuatro objetos tomados de a cuatro o 4^4. Este resultado ha sido indicado en la memoria del P. Douat.[8]

Estos nuevos cuadrados tomados de a dos y yuxtapuestos sobre una misma línea pueden tomar 256 x 256 es decir 65.536 disposiciones diferentes; luego, si se ubica debajo de una de las disposiciones obtenidas cualquiera de estas disposiciones, se forma un cuadrado de dieciséis baldosas; el número de estos cuadrados es igual a

[8] Observaciones del padre Douat, religioso carmelita de la provincia de Toulouse, sobre una memoria inserta en la *Histoire de l'Académie Royale des Scienees de París*, año 1704, por el padre Truchet, religioso de la misma orden. París, 1722.

65 536 x 65 536, es decir

4 294 967 296.

Del mismo modo, el número de disposiciones distintas encerradas en un cuadrado formado por sesenta y cuatro baldosas es igual a 2^{64} ó

18 446 744 073 709 551 616.

4. Disposiciones opuestas

Pero, entre todas estas disposiciones, deben dejarse de lado todas aquellas que no dan diseños de apariencia regular. Para obtener diseños aptos para mosaicos o embaldosados, se puede proceder primero por *yuxtaposición*. Para ello, se comienza por llenar completamente de baldosas la superficie de un rectángulo o de un cuadrado; luego se ejecuta el embaldosado reproduciendo, unos junto a otros, rectángulos iguales al primero, y colocando las baldosas en el mismo orden. Para diseñar este embaldosado, bastará con conocer la notación numérica del rectángulo elemental.

Se llaman *disposiciones opuestas o complementarías* dos disposiciones que se transforman una en otra reemplazando el blanco por el negro, y el negro por el blanco; así 1 y 3 son disposiciones complementarias; lo mismo 2 y 4. En consecuencia, dos disposiciones son complementarias cuando sus notaciones sólo difieren por el intercambio de las cifras 1 con 3, 2 con 4. Designando el conjunto de la notación de una de ellas con el signo +, la otra será designada con el signo -.

De esta forma, en lugar de ensamblar cuadrados o rectángulos elementales por simple yuxtaposición, se los puede ensamblar por *oposición* de línea o de columnas. Tomando un diseño cualquiera +, se lo puede duplicar de acuerdo a los tres modos principales (Figura 28).

Los dos primeros conducen a efectos de oposición por *líneas* o por *columnas*: el tercero es una oposición en damero.

Si se aplican los diferentes procedimientos de yuxtaposición que acabamos de describir a los cuadrados elementales de la Figura 27, se reproducen todos los diseños contenidos en la memoria de Truchet, con excepción de algunos que se encontrarán en los dos parágrafos siguientes.

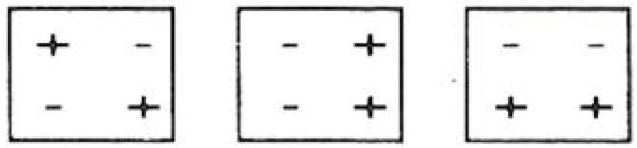


Figura 28

5. Efectos de diagonal y de simetría

Para obtener diseños que presenten líneas diagonales, se puede operar como sigue: se escribe sobre una primera línea, en un orden cualquiera, las cifras 1, 2, 3, 4; luego se hace una permutación circular, de tal suerte que estas cifras se encuentren alineadas en diagonal; damos un ejemplo tomado de la memoria de Truchet:

1	3	4	3	1	3	2	3
3	4	3	1	3	2	3	1
4	3	1	3	2	3	1	3
3	1	3	2	3	1	3	4
1	3	2	3	1	3	4	3
3	2	3	1	3	4	3	1
2	3	1	3	4	3	1	3
3	1	3	4	3	1	3	2

Figura 29. Embaldosado en diagonal

Cuando se quiera construir un álbum de embaldosados, bastará con conservar la notación de la disposición que produce un bello efecto; en la colección de las *diagonales* sólo habrá que inscribir la primera línea de la notación.

Se sabe que dos figuras planas son llamadas simétricas con respecto a una línea recta cuando plegando el plano que las contiene a lo largo de esta línea, las dos figuras coinciden exactamente. Ahora consideraremos, en particular, la simetría por líneas o por columnas. Para obtener la disposición simétrica por líneas, de una o varias líneas de baldosas, se escribe primero con lápiz la serie de los números de las baldosas en el orden inverso, luego se intercambian los números 1 y 2, Y los números 3 y 4. Así, por ejemplo, para obtener la simetría por líneas de la figura

2	4	3	1		1	3	4	2
4	3	1	2	se escribirá primero	2	1	3	4
3	1	2	4		4	2	1	3
1	2	3	4		4	3	2	1

y luego, después de haber intercambiado, en este último cuadro, 1 por 2 y 3 por 4, se tendrá la disposición simétrica por líneas

2	4	3	1		2	4	3	1
4	3	1	2		1	2	4	3
3	1	2	4		3	1	2	4
1	2	3	4		3	4	1	2

Para obtener la disposición simétrica por columnas, de una o de varias columnas de baldosas, se opera en el sentido de las columnas, como acabamos de hacerla en el sentido de las líneas, luego se intercambian los números 1 y 4, 2 Y 3.

6. Disposiciones regulares

Si se aplica este procedimiento a la disposición precedente, se obtiene un diseño que posee dos ejes y un centro de simetría; es lo que llamaremos una disposición regular. Se tiene, por ejemplo, la disposición regular (Figura 30).

2	4	3	1	2	4	3	1
4	3	1	2	1	2	4	3
3	1	2	4	3	1	2	4
1	2	3	4	3	4	1	2
4	3	2	1	2	1	4	3
2	4	3	1	2	4	3	1
1	2	4	3	4	3	1	2
3	1	2	4	3	1	2	4

Figura 30

Cuando se quiera construir un álbum de disposiciones regulares, bastará con conservar los embaldosados que presenten las mejores combinaciones, escribiendo solamente el primer cuarto de la disposición.

Por medio de esta notación, las planchas de la memoria de Truchet se resumen en las disposiciones regulares siguientes:

2	4	3	4	2	1	4	3	4
4	2	4	2	4	3	1	2	2
1	4	2	3	1	4	4	2	4

Figura 31. Embaldosados simétricos de 36 casillas

2	4	3	1	2	4	2	4	2	1	3	4	2	4	1	3
4	3	1	2	4	2	4	2	4	2	1	3	4	2	3	1
3	1	2	4	2	4	2	4	2	1	3	4	3	1	4	2
1	2	3	4	4	2	4	2	4	2	1	3	1	3	2	4

Figura 32. Embaldosados simétricos de 64 casillas

4	2	2	4	2
2	2	4	2	4
2	4	2	4	2
4	2	4	2	2
2	4	2	2	4

4	1	3	1	3
3	4	2	4	2
1	2	4	2	4
3	4	2	4	1
1	2	4	3	4

Figura 33. Embaldosados simétricos de 100 casillas

A continuación se ensamblan los diseños, sea por simple yuxtaposición, sea por oposición, sea en damero. El lector que se ejercite en el ensamblado de estas baldosas, de madera o de cartón recortado, se sorprenderá por la variedad indefinida y por la simetría de los diseños que se pueden obtener para la construcción de mosaicos.

7. Embaldosados analagmáticos

En lugar de ensamblar baldosas divididas en dos colores por una línea diagonal, es posible también ensamblar baldosas de dos o más colores: se obtienen así resultados muy diferentes de los que acabamos de describir. Pero nosotros relacionaremos la teoría general de los diseños regulares que pueden obtenerse mediante estos ensamblados a la geometría del tejido; no nos ocuparemos aquí más que de un género muy curioso de embaldosado, al que Sylvester ha dado el nombre de cuadrados analagmáticos.

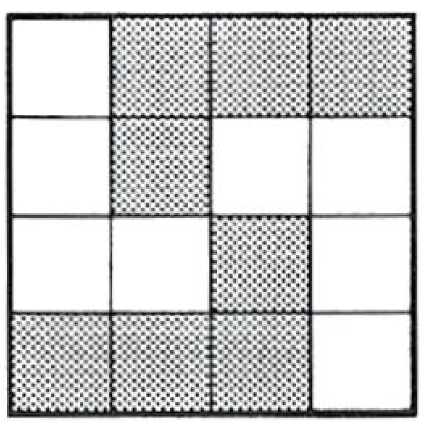


Figura 34. Embaldosado analagmático de 16 casillas

El tablero analagmático es un cuadrado formado por casillas negras y blancas, en igual o desigual cantidad, de tal suerte que, para dos líneas o dos columnas cualesquiera, el número de cambios de color sea siempre igual al número de permanencias. La Figura 34 es un tablero analagmático de dieciséis casillas.

Hay un embaldosado analagmático de este tipo, de mármol blanco y rosa, en uno de los patios de un establecimiento público de Londres.

Si se reemplazan las casillas negras por las casillas blancas, y a la inversa, se obtiene un tablero analagmático *opuesto o complementario*.

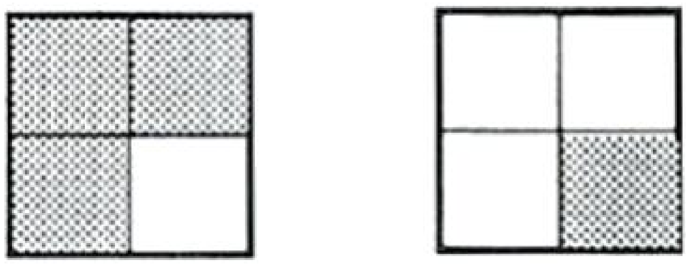


Figura 35

He aquí un procedimiento para construir los cuadrados analagmáticos de 2n casillas de lado.[9] Tenemos los dos tableros complementarios de dos casillas de lado (Figura 35):

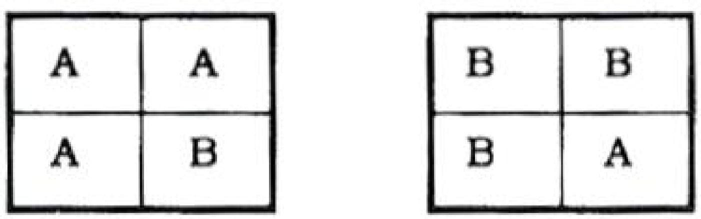


Figura 36

Con estos dos tableros A y B, se formarán los dos siguientes, complementarios, de cuatro casillas de lado (Figura 36), es decir Figura 37):

[9] Laisant, *Notice historique sur les travaux des sections de Mathématiques* (Asociación francesa por el avance de las ciencias, Informe de la 8ª sesión, Montpellier, 1879).

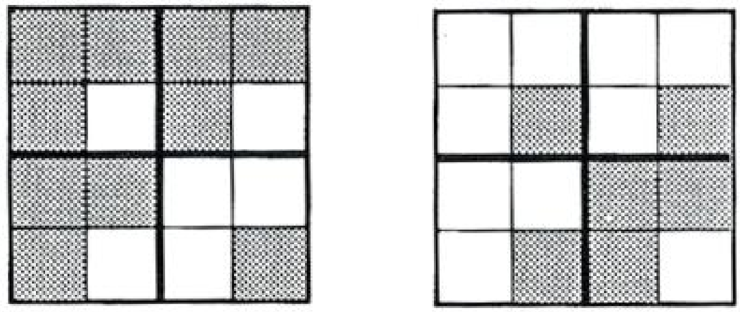


Figura 37

Luego si, en la Figura 36, se reemplaza A y B por A' y B', se obtienen cuadrados analagmáticos complementarios de ocho casillas de lado; y así siguiendo. Pues será siempre así, toda vez que se reemplace en esta figura los cuadrados A y B por dos cuadrados analagmáticos complementarias cualesquiera sean. Por otra parte, resulta evidente que de un tablero pueden deducirse muchos otros:

1. *por permutación de líneas o de columnas;*
2. *por cambio de color de todas las casillas de una línea o de una columna.*

8. Formulas de aritmética

En el Congreso de Havre, hemos mostrado la analogía que existe entre el tablero analagmático de Sylvester y las fórmulas que dan la descomposición del producto de sumas de dos, cuatro, ocho cuadrados en una suma de dos, cuatro, ocho cuadrados. Se sabe que esta fórmula ha sido dada por Leonardo de Pisa para dos cuadrados, por Euler para cuatro cuadrados, por Prouhet y Cayley para ocho cuadrados.

Por ejemplo, reemplazando las casillas blancas de la Figura 34 por el signo + y las casillas negras por el signo -, se forma el cuadro

$$\begin{array}{cccc} + & - & - & - \\ + & - & + & + \\ + & + & - & + \\ - & - & - & + \end{array}$$

que reconocemos en el producto de

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \quad \text{por} \quad p^2 + q^2 + r^2 + s^2,$$

dispuesto como una suma de cuatro cuadrados, en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
&[+ \ ap - bq - cr - ds]^2,\\
&[+ \ as - br + cq + dp]^2,\\
&[+ \ aq + bq - cs + dr]^2,\\
&[- \ ar - bs - cp + dq]^2,
\end{aligned}$$

9. Mosaicos de Laisant

Es posible obtener otros embaldosados regulares compuestos de cuadrados blancos y negros y, más comúnmente, de cuadrados de varios colores, por diversos procedimientos.

A	B
B	A

B	A
A	B

Figura 38

Indicaremos, en particular, los diseños obtenidos por Laisant, que él ha deducido de consideraciones sobre el álgebra y sobre la teoría de los cuaterniones.[10] Designamos con A un tablero cualquiera formado por casillas negras y blancas, con B el tablero

[10] Laisant, *Sur les développments de certains produits algébriques* (Asociación francesa por el avance de las ciencias, Congreso de Argel, 1881), La idea de este estudio se origina en el problema siguiente, propuesto por Catalan a los lectores de *Nouvelle Correspondance mathématique* (t, VI, p. 141): "En el desarrollo del producto

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d)...,$$

efectuado en el orden ordinario, a saber:

$$1 - a - b + ab - c + ac + bc + abc - d + ... ,$$

¿cuál será el signo de un término dada su ubicación?

complementario obtenido intercambiando los colores de las casillas.

Con estos dos tableros A y B, se formarán dos tableros complementarios cuatro veces más grandes (Figura 38).

Luego, si reemplazamos A y B por A' y B' en la Figura 38, obtendremos mosaicos complementarios cuatro veces más grandes, y así sucesivamente. Si, en primer lugar, suponemos que A y B representan un solo cuadrado blanco y un solo cuadrado negro respectivamente, se formarán mosaicos de 4, 16, 64 casillas (Figura 39), así como también sus complementarios.

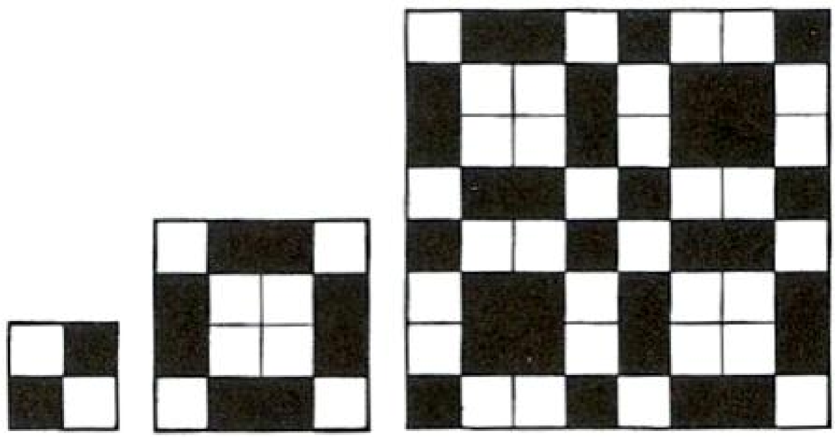


Figura 39

Puede observarse que cada uno de los tableros de la Figura 39 posee la propiedad de una tabla de Pitágoras, es decir que, para averiguar el color de una casilla cualquiera, bastará con mirar la primera casilla de su columna y la primera casilla de su línea. Si ellas son del mismo color, la casilla considerada será blanca; si son de colores contrarios, la casilla será negra. Ocurrirá a la inversa en los tableros complementarios. Además, entre dos columnas o dos líneas cualesquiera del tablero, las casillas correspondientes son todas del mismo color o todas de colores contrarios.

Para formar diseños regulares de mosaicos de tres colores, designamos con A un tablero tricolor cualquiera; con B el tablero obtenido reemplazando en A el primer color por el segundo, el segundo por el tercero, y el tercero por el primero; con C el tablero deducido de B, como B ha sido deducido de A. Diremos que los tres tableros son asociados; con estos tres tableros A, B y C, formaremos tres tableros asociados nueve veces más grandes (Figura 40).

A	B	C
B	C	A
C	A	B

Cuadrado A'

B	C	A
C	A	B
A	B	C

Cuadrado B'

C	A	B
A	B	C
B	C	A

Cuadrado C'

Figura 40

Luego si, en la Figura 40, reemplazamos A, B y C por los tableros asociados A', B' y C', obtendremos mosaicos tricolores nueve veces más grandes, y así sucesivamente. Si suponemos que A, B Y C representan respectivamente un solo cuadrado blanco, gris o negro, se formarán mosaicos de 9, 81,... casillas (Figura 41), así como también los mosaicos asociados que se deducen de una de ellos por permutación circular de líneas, de columnas o de colores.

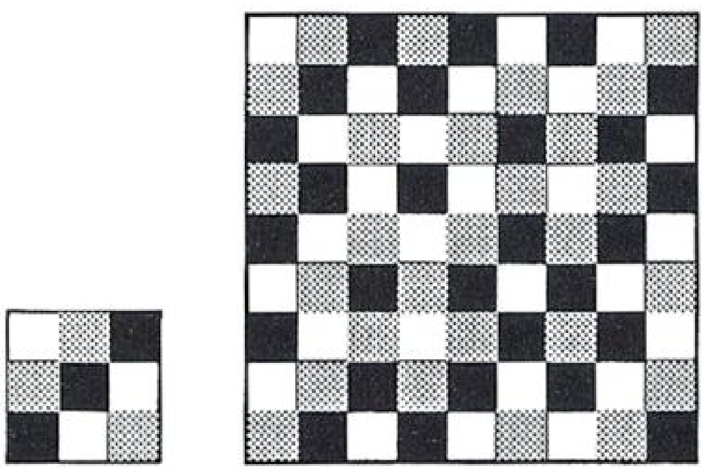


Figura 41

Séptima recreación
El juego de rondas

A Jules Develle, diputado de Eure

¡Ay, virginidad del corazón, tan pronto arrebatada!
¡Proyectos de dicha y amor, sueños gozosos,
Frescas ilusiones del alba de la vida!
¡Por qué no durarán hasta el final del día!
THÉOPHILE GAUTIER

Contenido:

Los griegos se complacían en dar a casi todos los juegos de las niñas una forma orquestal. Cuando se aproximaba una fiesta, ¿no era necesario acaso preparar las ceremonias, repetir los cantos, instruirse en las evoluciones del coro? Las fiestas eran numerosas en toda Grecia y los coros de una diversidad infinita. Los juegos, por lo tanto, debían reflejar sus ocupaciones preferidas. Ora se toman todas de la mano y una de ellas conduce el coro, enrollándolo a su gusto, como la joven Oritia de Apolonio al borde del Ilissus; ora forman una ronda, un collar, tal como nos lo describe Luciano. Es decir, los muchachos intercalados entre las muchachas, todos tomados de la mano en ronda, ellos danzando con aire marcial, ellas afectando un paso modesto y decente. Es así que se pueden considerar como juegos de señoritas la mayor parte de las danzas descritas por los autores de la antigüedad.

Las rondas infantiles, las rondas alternadas, los paseos de las niñas, de a dos o de a tres, dan lugar a un cierto número de problemas novedosos e interesantes, que se relacionan con la teoría de las combinaciones. Entre los diversos métodos conocidos, expondremos preferentemente las soluciones simples e ingeniosas de M. Walecki, profesor de matemáticas especiales en el Liceo Condorcet.

1. Las rondas infantiles

Los niños danzan en ronda, tomados de la mano. La pregunta es: ¿cómo hay que disponer a los niños para que cada uno de ellos se encuentre sucesivamente al lado de todos los otros, ya sea a la derecha o a la izquierda, pero no pudiendo ser vecino de otro más que una sola vez?

Primero señalamos que, en una disposición circular, un niño tiene dos vecinos, uno a la derecha. el otro a la izquierda; luego, puesto que dos niños no pueden estar juntos más que una sola vez, el número de vecinos sucesivos de un niño será siempre par; en consecuencia, para que el problema sea posible, se necesita que el número total de niños sea impar. Queda por demostrar que, cuando el número de niños es impar e igual a $2n + 1$, se los puede hacer entrar en n rondas sucesivas, pero de tal forma que la condición exigida por el enunciado sea siempre cumplida.

Designemos a los niños con las letras del alfabeto; dividamos la circunferencia en $2n$ partes iguales (Figura 42); ubiquemos $2n$ letras en los vértices del polígono regular, y la letra A sobre el diámetro.[11] Ahora tomemos como primera ronda a los niños en el orden

[11] En este problema no hay que tener en cuenta la letra L de la figura 42.

I --» A B C D E F G H I J K A

que representa una de las permutaciones circulares de 2 n + 1 letras.[12]

Dicho esto, para obtener una segunda disposición de los niños, consideraremos el conjunto de las líneas rectas de la figura como una aguja móvil que haremos girar una marca por vez en el sentido de las agujas del reloj, llevando la letra A. mientras que las otras letras quedarán inmóviles en el contorno. Tendremos así, siguiendo el zigzag de la aguja, la segunda ronda.

II --» A C E B G D I F K H J A.

Si hacemos girar la aguja en el mismo sentido, pero dos, tres, cuatro marcas, obtendremos las otras rondas

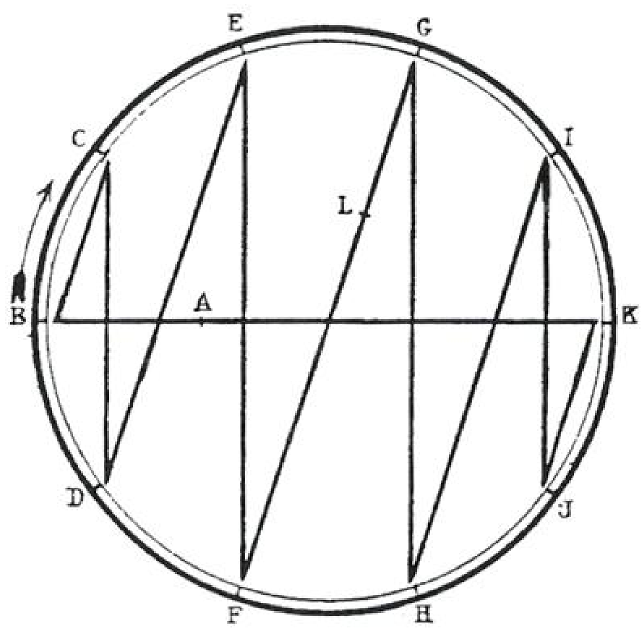


Figura 42

III --» A E G C I B K D J F H A,

[12] El número de permutaciones circulares de q letras es igual al producto de los q-l primeros números enteros: 1 x 2 x 3 x ... x (q-l).

IV --» A G I E K C J I B H D F A,

V --» A I K G J E H C F B D A.

Como regla general, se hace girar sucesivamente la aguja de modo tal que uno de los vértices del polígono quebrado, formado por la aguja, ocupe *n* marcas consecutivas de la circunferencia. Hemos formado así *n* permutaciones circulares de las 2*n* + 1 letras, en tal forma que dos letras vecinas en una de estas permutaciones no vuelvan a serlo en ninguna otra. En efecto, debemos considerar dos casos, según que una de las letras ocupe el interior o alguna de las marcas de la circunferencia. Para que dos letras, una de ellas A, resulten vecinas, es necesario y suficiente que el diámetro de la aguja móvil pase por la otra, lo que ocurre una sola vez y nada más que una. Para que dos letras del contorno sean vecinas, es necesario y suficiente que la recta que las une sea paralela a uno de los lados del polígono de la aguja móvil; ahora bien, todas las direcciones de los lados de este polígono son diferentes en las *n* posiciones de la aguja.

2. El procedimiento del rompecabezas

Se puede también resolver el problema como un rompecabezas de piezas móviles. Supongamos que hay once niños; escribamos sus nombres o las letras que los distinguen sobre una de las caras de once cubos iguales, y encerremos todos estos cubos en una caja rectangular (Figura 43) en la cual la línea gruesa es una barrera infranqueable.

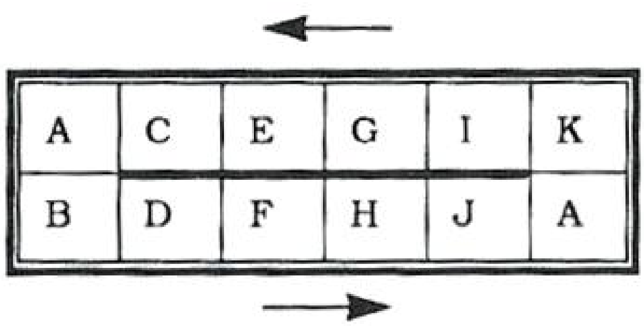


Figura 43

Convengamos en leer las letras de cada una de las disposiciones de los cubos en el orden de la primera ronda A B C D E F G H I J K A, que forma en la caja siempre el mismo zigzag. Para obtener la segunda ronda, basta con quitar los cubos A, desplazar los otros una casilla en el sentido de la flecha, luego bajar el cubo situado a la izquierda, subir el cubo situado a la derecha y volver a poner los dos cubos A. Para las rondas siguientes, se realiza de nuevo la maniobra.

Así, se obtienen las disposiciones del parágrafo precedente. En efecto, esto nos lleva a suponer la aguja inmóvil (Figura 42) Y a desplazar al mismo tiempo todas las letras de la circunferencia una, dos, tres, etc. marcas en el sentido opuesto al de las agujas del reloj. Si se deforma el polígono de la aguja y se reemplaza la circunferencia por el perímetro de un rectángulo, nos hallamos ante el procedimiento del rompecabezas.

3. Las rondas pares

Hasta aquí, hemos partido del supuesto de que el número de niños de la ronda es impar, y hemos mostrado que el problema propuesto es imposible cuando el número de niños es par. Sin embargo, en este último caso, se puede modificar el enunciado de las dos maneras siguientes:

Los niños en número par danzan en ronda, tomados de la mano. La pregunta es: ¿cómo hay que disponer a los niños en rondas sucesivas, de modo tal que cada uno sea vecino de todos los otros, salvo de uno, y no pueda seda más que una sola vez?

Designemos de nuevo a los niños con las letras del alfabeto, y supongamos que son doce; dividiremos la circunferencia en diez partes iguales (Figura 42) Y trazaremos la línea quebrada ABCDE.... que corresponde, como en el problema de las rondas impares, a los once primeros niños. Luego ubicaremos la decimosegunda letra L sobre el segundo diámetro FG de la aguja. Siguiendo el zigzag de ésta, se obtiene para la primera ronda

I --» A B C D E F L G H I J K A

Dicho esto, para obtener una segunda disposición, haremos girar la aguja una marca y obtendremos la ronda

II --» A C E B G D L I F K H J A

Para obtener las otras tres rondas, haremos avanzar tres veces la aguja una marca por vez.

Es fácil ver que las rondas son todas distintas. En cuanto a las letras que nunca se tocan, ellas son las letras A y L ubicadas sobre los dos diámetros y. además, las parejas de letras diametralmente opuestas. Como regla general, si el número de niños es $2n$, el número de rondas distintas es $n - 1$.

Los niños en número par danzan en ronda, tomados de la mano. ¿Cómo hay que disponerlos en rondas sucesivas, de modo tal que cada uno de ellos sea dos veces vecino de uno de los otros. y una sola vez vecino de los restantes?

Supongamos que los niños son diez, y designémoslos con las letras B, C, D, E, F, G, H, I, J, K.

Dividamos la circunferencia en diez partes iguales, y formemos la Figura 42;[13] si operamos como en los problemas precedentes, por el movimiento de la aguja, obtendremos cinco rondas sucesivas, que no diferirán de las cinco rondas del primer problema de esta recreación más que por la supresión de la letra A Dos letras diametralmente opuestas son dos veces vecinas, puesto que hay dos diámetros en la aguja; pero dos letras no diametralmente opuestas sólo son vecinas una vez, puesto que todas las orientaciones de la aguja son diferentes. Como regla general, si el número de niños es par. el número de rondas distintas es la mitad de esa cantidad.

4. Las rondas alternadas

Muchachos y chicas danzan en ronda, tomados de la mano. ¿Cómo deben efectuarse las rondas sucesivas, de modo tal que cada uno de los muchachos sea vecino una sola vez de cada una de las chicas, y que cada chica sea vecina una sola vez de todos los muchachos?

[13] Para este problema no hay que tener en cuenta las letras A y L de la Figura 42.

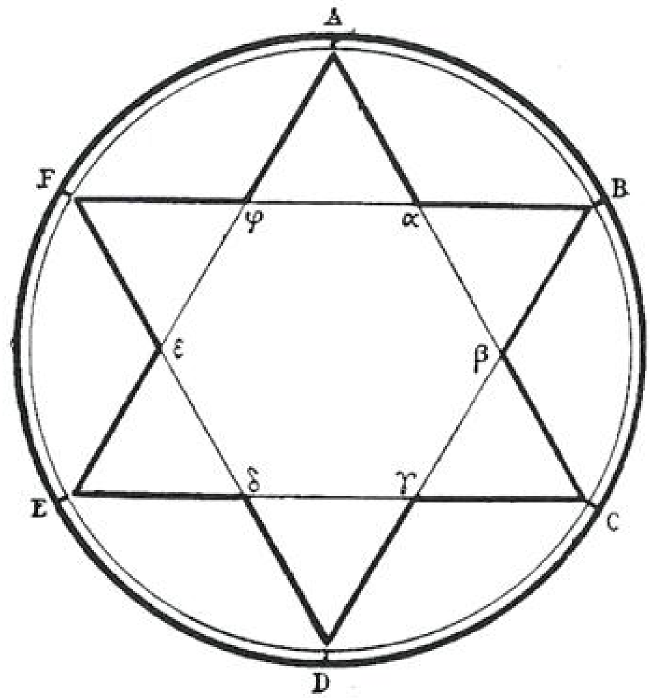


Figura 44

Designemos a los muchachos, en número *n*, con las letras del alfabeto, y a las chicas, en igual número, con las letras griegas correspondientes. En principio, se observará que cada uno de los *n* muchachos debe ser vecino de cada una de las chicas: hay n^2 vecindades a realizar; pero cada una de las rondas da lugar a $2n$ vecindades; por lo tanto, el número total de rondas debe ser igual al cociente de n^2 por $2n$, es decir a $(½)n$. En consecuencia, para que el problema sea posible, el número de muchachos debe ser par.

Dicho esto, dividamos la circunferencia en n partes iguales, y unamos los puntos de división de dos en dos; las líneas de unión forman dos polígonos regulares de (½)n lados. Ubiquemos a los muchachos en los puntos de división de la circunferencia: A, B, C, D... (Figura 44), y a las chicas en **α**, **β**, **γ**, y, **δ**,... Consideraremos, para la primera ronda, siguiendo los contornos de la estrella, el ciclo

A α B β C γ D δ E ε F ζ.

Para obtener una segunda ronda alternada, haremos girar la estrella, como una aguja, dos marcas; si las letras griegas, que representan a las chicas, son desplazadas en el movimiento de la aguja, mientras que los muchachos permanecen inmóviles, la señorita ɑ, que se encontraba al principio entre los señores A y B, se encontrará enseguida entre C y D; y si se hace girar sucesivamente la aguja dos marcas, cada rotación le da dos nuevos vecinos; luego de (½)*n* rotaciones, ella se encontrará en la posición primitiva, después de haber estado al lado de todos los muchachos una sola vez.

Cuando el número de muchachos es impar, se opera de la misma manera, pero haciendo girar la aguja una sola marca; entonces cada una de las chicas estará dos veces al lado de todos los muchachos, una vez a la derecha y otra vez a la izquierda.

5. Las rondas con centro

Tomados de la mano, los niños danzan en ronda alrededor de otro situado en el centro. ¿Cómo hay que disponer a los niños, en rondas sucesivas, de modo tal que cada uno de ellos esté una vez en el centro y dos veces al lado de todos los compañeros?

Para fijar las ideas, supongamos que los niños sean trece; dividamos la circunferencia en doce partes iguales: unamos los puntos de división como lo hemos hecho en la Figura 45. Tomaremos como primera ronda

I. --» B C D E F G H I J K L M B y A en el centro.

Siguiendo el zigzag de la figura, tomaremos como segunda ronda

II. --» A M C L D K E J F I G H A y B en el centro.

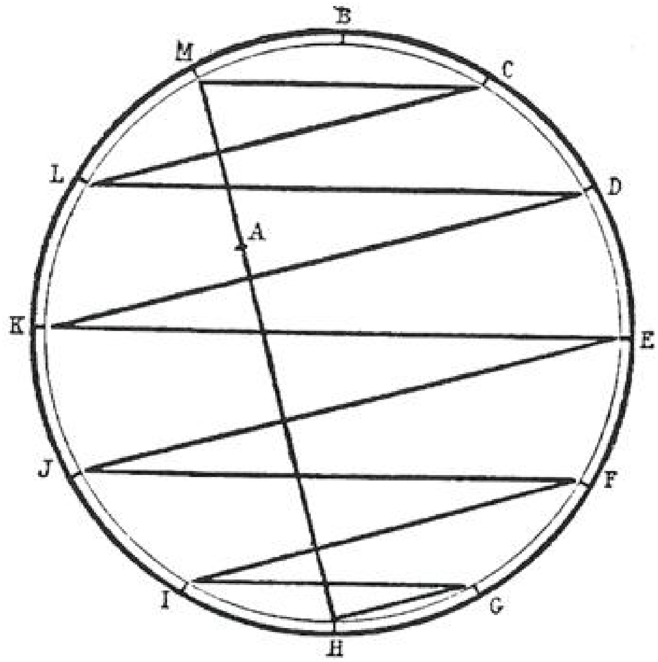


Figura 45

Para obtener la tercera ronda, haremos girar el zigzag como una aguja, una marca por vez en el sentido BC; la letra C quedará aislada a su turno. y tendremos

III. --» A B D M E L F K G J H I A y C en el centro;

y así siguiendo, de manera de formar las trece rondas exigidas por el enunciado.

En efecto, es evidente que cada una de las letras se encuentra una sola vez en el centro. Además, dos letras consecutivas, que son vecinas en la primera ronda, son vecinas también cuando la cuerda de la aguja que subtiende una duodécima parte de la circunferencia se encuentra en la posición conveniente, lo que ocurre una sola vez. Se observará, por otra parte, que las cuerdas de la aguja móvil tienen siempre inclinaciones diferentes en las posiciones sucesivas de la aguja.

De lo que precede, resulta que no se sabría formar rondas con centro, donde cada niño esté una sola vez en el centro y una sola vez al lado de cada uno de sus compañeros.

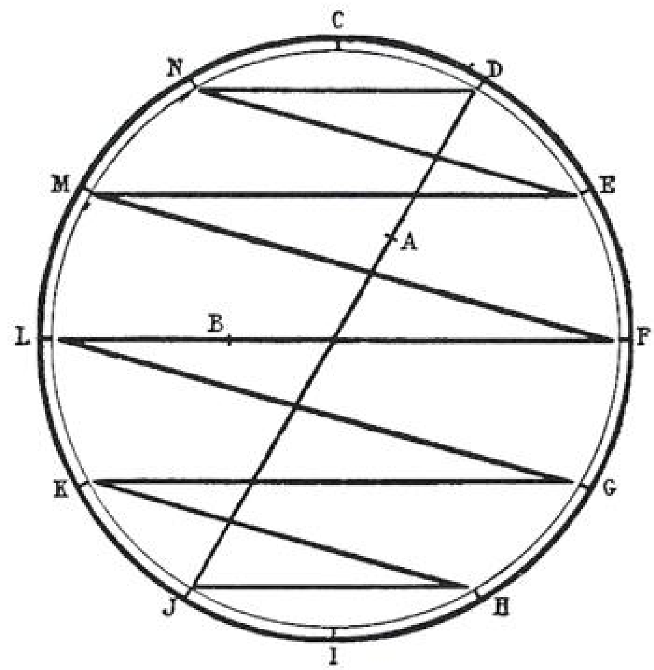


Figura 46

Tomados de la mano, los niños danzan en ronda alrededor de otros dos situados en el centro. ¿ Cómo hay que disponer a los niños, en rondas sucesivas, de modo tal que cada uno de ellos esté una vez en el centro y una sola vez al lado de todos su compañeros que no hayan estado con él en el centro?

En primer lugar, es evidente que el número de niños debe ser par. Para fijar las ideas, supongamos que los niños son catorce; dividamos la circunferencia en doce partes iguales, y unamos los puntos de división (Figura 46). Tomaremos como primera ronda

I. --» C D E F G H I J K L M N C y A B en el centro.

Siguiendo el zigzag de la figura e intercalando A y B, tomaremos como segunda ronda

II. --» A D N E M F B L G K H J A y C I en el centro.

Para obtener la tercera ronda, haremos girar la aguja una marca en el sentido C D;

las letras D y J se encontrarán aisladas, y tendremos

III. --» A E C F N G B M H L I K A y D J en el centro.

Así formaremos sucesivamente las siete rondas exigidas por el enunciado.

En efecto, las letras A y B, Y las parejas formadas por las letras opuestas diametralmente se encuentran sucesivamente en el centro. Además, dos letras consecutivas que son vecinas en la primera ronda no 10 son más en las otras, puesto que la aguja no contiene el lado del dodecágono. Por otra parte, se observará que las cuerdas de la aguja móvil tienen siempre inclinaciones diferentes en las diversas posiciones de la aguja.

6. La grulla y el trenecito

Los laberintos han sido el origen de un juego o de una danza que se llamaba la *Grulla* y que, en nuestros días, se llama el trenecito. A imitación de estos pájaros que vuelan en largas filas, los bailarines se toman de la mano y describen, guiados por el conductor del coro, vueltas y sinuosidades que recuerdan las circunvoluciones y ramificaciones de los laberintos. Esta danza figura en el escudo de Aquiles (*Ilíada*, XVIII, 596).

Plutarco atribuye su invención a Teseo. Después de haber vencido al Minotauro, Teseo, de paso por Delos, quiso homenajear a Apolo con una nueva ceremonia. Ejecutó entonces una danza, conservada por los habitantes de Delos, en la que se describen vueltas y revueltas, imitando los circuitos del laberinto. Recibió el nombre de *Grulla* (Teseo, XXI).

El *trenecito*, transformación de la antigua danza de la *Grulla*, es un juego estudiantil. Una vez terminadas las pruebas escritas para la admisión en la Escuela Politécnica, los candidatos de los liceos y de las escuelas preparatorias se reúnen en los jardines de Luxemburgo, en París. Luego, conducidos por el más alto, atraviesan los bulevares en fila india, colocando cada uno las manos en los hombros del compañero que lo precede. El lugar de destino es el patio del College de Francia, donde comienzan, varios días después, los exámenes orales. Llegados allí, describen las diversas circunvoluciones de la curva que representa el resultado de la prueba de matemáticas. Se trata de una vieja costumbre; pero no se sabe si, conservándola, los futuros politécnicos han querido rendir homenaje a la memoria de Descartes, inventor de la geometría analítica.

Estos juegos nos conducen naturalmente a los problemas que siguen, concernientes a las filas y los paseos de un pensionado.

7. Las filas indias

Los niños se pasean uno detrás del otro, formando una fila rectilínea. ¿Cómo hay que disponer las filas sucesivas de modo tal que cada uno de los niños sea una vez, y nada más que una, vecino de todos los otros?

Designemos con n el número de niños. En primer lugar, observaremos que, si cada niño debe ser vecino de todos los otros, hay $(½)n(n - 1)$ vecindades para realizar; éste es el número de combinaciones de n objetos tomados de a dos; pero cada una de las filas permite $n - 1$ vecindades; en consecuencia, el número de filas posibles es igual a $(½)n$. Por lo tanto, para que el problema sea resoluble, es preciso que el número de niños sea par.

Para obtener las filas, se agrega una letra suplementaria a las letras que designan a los niños; se forman todas las rondas impares de $n + 1$ letras; hecho esto, se abre la ronda donde se ha introducido la letra suplementaria, y se suprime esta letra. Se obtienen así todas las permutaciones rectilíneas requeridas por el enunciado.

OBSERVACION. Cada uno de los niños se encontrará aislado una sola vez, al comienzo o al final de la fila india. Se duplica el número de filas, formándolas en sentido inverso; pero en ese caso, cada uno de los niños será dos veces vecino de todos los otros, una vez adelante y otra vez detrás.

8. Los paseos del pensionado

En un pensionado hay un número par de jovencitas que se pasean de dos en dos, todos los días. ¿Cómo disponer los paseos para que una joven se halle sucesivamente en compañía de todas las otras, pero no más de una vez?

Supongamos que en el pensionado hay doce señoritas que designaremos con las letras del alfabeto. Dividamos una circunferencia en once partes iguales; situemos en el centro una de las letras, L, y las restantes en los puntos de división de la circunferencia, en un orden cualquiera; luego, tracemos las líneas rectas de la Figura 47; agruparemos a las jóvenes de a dos para el primer paseo, juntando A con L, y las otras siguiendo las líneas paralelas, de modo tal que el primer paseo se componga de seis grupos:

I. --» AL, BK, CJ, DI, EH, FG.

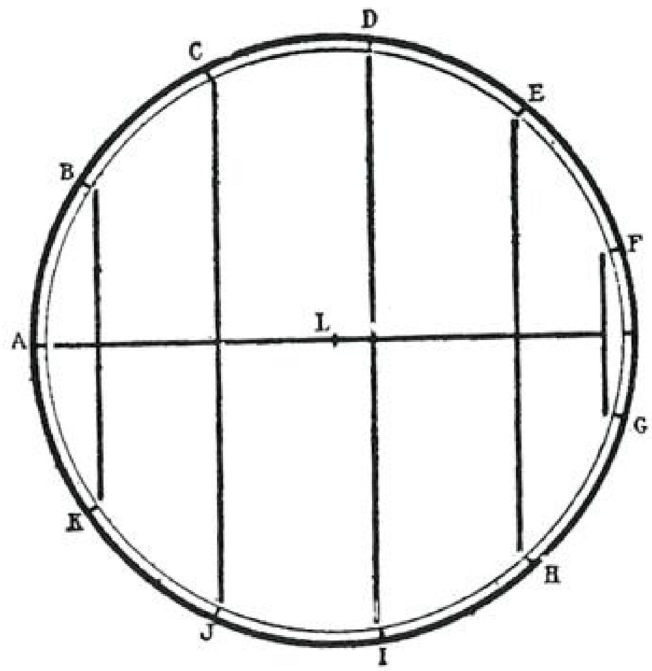


Figura 47

Para obtener los grupos del segundo paseo, consideraremos el conjunto de las líneas rectas de la figura como una aguja móvil que haremos girar una marca por vez en el sentido de las agujas del reloj, mientras que las letras permanecerán inmóviles en el contorno; tendremos así, para el segundo paseo, los grupos

II. --» BL, CA, DK, EJ, FI, GH.

Si hacemos girar la aguja en el mismo sentido una, dos, tres marcas, obtenemos para los paseos de los días siguientes:

III. --» CL, DB, EA, FK, GJ, HI;

IV. --» DL, EC, FB, GA, HK,IJ;

V. --» EL, FD, GC, HB, IA, JK;

y así siguiendo, de tal suerte que se obtienen once paseos, que comprenden cada vez a todas las jóvenes. Nos queda por mostrar que dos jóvenes de un mismo grupo en un paseo pertenecen a grupos diferentes en todos los otros paseos. En efecto, tenemos que considerar dos casos, según que una de las letras, que representan a las jóvenes, ocupe el centro o una de las divisiones de la circunferencia. Para que dos letras pertenezcan al mismo grupo, estando una de ellas en el centro, es necesario y suficiente que el diámetro de la aguja móvil pase por la otra, lo que ocurre una vez y nada más que una. Para que dos letras del contorno pertenezcan al mismo grupo, es necesario y suficiente que la recta que las une sea perpendicular al eje de la aguja; ahora bien, las direcciones del eje o las de las perpendiculares son diferentes en las once posiciones de la aguja.

9. Otra vez el rompecabezas

También se puede resolver el problema de los paseos del pensionado por medio del empleo del rompecabezas de piezas móviles. Sean AB... KL los cubos del rompecabezas (Figura 48), que sirven para distinguir a las muchachas.

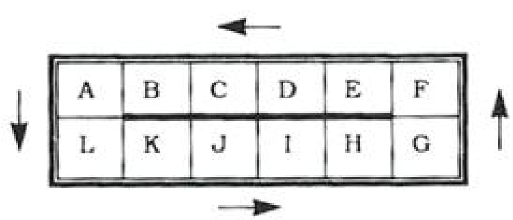


Figura 48

Convengamos en leer cada paseo agrupando los cubos de a dos por columnas verticales, es decir que para el primer paseo siguen el orden

AL. BK. CJ. DI. EH, FG.

Para obtener el segundo paseo, basta con quitar el cubo L, bajar el cubo A, mover un lugar hacia la izquierda los cubos de la línea superior, subir el cubo G, luego mover un lugar hacia la derecha todos los cubos de la línea inferior; en fin, volver a poner el cubo L en la casilla vacía, de modo tal que L ha vuelto al mismo sitio.

Se obtienen los mismos paseos que mediante el empleo de la aguja; en efecto, es igual que suponer inmóvil la aguja de la Figura 47 y desplazar al mismo tiempo todas las letras de la circunferencia una, dos o tres marcas en el sentido opuesto al de la aguja. Si se deforma el polígono de la aguja, suponiendo iguales todas las cuerdas, y se reemplaza el perímetro de la circunferencia por el de un rectángulo, se reproduce el procedimiento del rompecabezas.

10. Las monitoras

Hemos supuesto, en los dos parágrafos precedentes, que el número de pensionistas era par, y que el problema resultaba imposible en el caso de un número impar. Sin embargo, en este último caso, se puede modificar el enunciado de la manera siguiente:

En un pensionado hay un número impar de jovencitas que se pasean de a dos todos los días, con excepción de una que hace el papel de monitora. ¿Cómo disponer los paseos para que cada joven se halle una sola vez en compañía de todas las otras y haga una sola vez de monitora?

Admitiendo que haya once jóvenes, se divide la circunferencia en once partes iguales, y se construye la Figura 47 sin tener en cuenta la letra L situada en el centro. Se hace girar la aguja una, dos, tres, etc. marcas; la monitora es representada por la letra que está en la extremidad del diámetro de la aguja, mientras que las alumnas se encuentran agrupadas de a dos, en las extremidades de las cuerdas perpendiculares.

Este problema se deduce del problema de las doce pensionistas, suprimiendo en los paseos la letra L. También es posible utilizar el procedimiento del rompecabezas.

OBSERVACION. Si se anotan todos los paseos de las alumnas, suponiéndolos ya sea en número par o impar, se forma evidentemente el cuadro completo de todas *las combinaciones de las alumnas en pareja, como es fácil verificarlo por un cálculo directo.*

11. Las triadas de las nueve musas

Estando las nueve musas agrupadas de a tres, ¿cómo hay que disponer los grupos para que cada una de ellas se encuentre sucesivamente en una tríada con todas las otras, sin que esto ocurra más de una vez?

En principio, observaremos que en cada reunión completa, una musa tiene dos compañeras; pero, puesto que dos musa s no pueden estar juntas más de una vez en una misma tríada, el número de reuniones debe ser igual a cuatro. Ahora queda por demostrar que el problema es posible. Para ello, designaremos a una de las musas, Polimnia, por ejemplo, con la letra p: a Melpómene y Urania, con a_1 y a_2: a Euterpe y Erato, con b_1 y b_2; a Calíope y Clío, con c_1 y c_2; en fin, a Terpsícore y Talía, con d_1 Y d_2. Por otra parte, se puede cambiar el orden precedente, permutando alguna de las nueve letras. Dicho esto, consideremos las cuatro tríadas

$$p\ a_1\ a_2$$
$$p\ b_1\ b_2$$
$$p\ c_1\ c_2$$
$$p\ d_1\ d_2$$

ellas pertenecen a cuatro reuniones diferentes, puesto que, en cada reunión, la letra p no puede estar más que una vez. Formemos ahora las combinaciones de las cuatro letras a, b. c, d, en grupos de tres; estas combinaciones son

bcd,
cda,
dab,
abc.

Escribamos dos veces cada una de ellas debajo de las cuatro triadas anteriores, pero de manera tal que en cada columna vertical no se repitan las letras de la primera línea; obtenemos así el siguiente cuadro:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} p & a_1 & a_2 & p & b_1 & b_2 & p & c_1 & c_2 & p & d_1 & d_2 \\ b & c & d & c & d & a & d & a & b & a & b & c \\ b & c & d & c & d & a & d & a & b & a & b & c \end{array}\right|$$

Ahora nos falta añadir los índices 1 y 2 en las dos últimas líneas, de manera que las condiciones del enunciado sean cumplidas; se escriben primero los índices de la primera disposición y de las primeras columnas de las otras tres, como sigue:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} p & a_1 & a_2 & p & b_1 & b_2 & p & c_1 & c_2 & p & d_1 & d_2 \\ b_1 & c_1 & d_1 & c_1 & d & a & d_1 & a & b & a_1 & b & c \\ b_2 & c_2 & d_2 & c_2 & d & a & d_2 & a & b & a_2 & b & c \end{array}\right|$$

Dado que b_1 se encuentra con c_1 en la primera reunión, b_1 se encontrará con c_2 en otra; igualmente para c y d, y para b y d; se obtendrá entonces necesariamente el siguiente cuadro:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} p & a_1 & a_2 & p & b_1 & b_2 & p & c_1 & c_2 & p & d_1 & d_2 \\ b_1 & c_1 & d_1 & c_1 & d_2 & a & d_1 & a & b_2 & a_1 & b & c \\ b_2 & c_2 & d_2 & c_2 & d_1 & a & d_2 & a & b_1 & a_2 & b & c \end{array}\right|$$

Agreguemos los índices 1 y 2 a las letras a de la segunda reunión; obtendremos el mismo orden en la disposición siguiente, y resulta fácil deducir la cuarta reunión.

En resumen, reuniremos a las nueve musas siguiendo los cuatro grupos diferentes:

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc|ccc|ccc} p & a_1 & a_2 & p & b_1 & b_2 & p & c_1 & c_2 & p & d_1 & d_2 \\ b_1 & c_1 & d_1 & c_1 & d_2 & a_1 & d_1 & a_1 & b_2 & a_1 & b_1 & c_2 \\ b_2 & c_2 & d_2 & c_2 & d_1 & a_2 & d_2 & a_2 & b_1 & a_2 & b_2 & c_1 \end{array}\right|$$

Más abajo, indicaremos un método muy simple, debido a Walecki; el precedente debe ser considerado como una introducción al método de Frost que desarrollamos en el parágrafo que sigue.

12. Las quince señoritas

El problema de las quince señoritas fue propuesto por primera vez en 1851, por Kirkman, a quien debemos también teoremas sumamente interesantes sobre la figura del *Hexagrama místico* de Pascal. Este problema supo atraer la atención de los señores Cayley y Sylvester, y de algunos otros matemáticos que han publicado sus investigaciones en las revistas científicas de Inglaterra y América. Creemos que es ésta la primera vez que dicho problema, así como otros del mismo género de los anteriores, se publica en Francia. Aunque vinculados directamente a los primeros elementos de la teoría de las combinaciones, presentan dificultades bastante grandes, que de inmediato se harán evidentes buscando la solución del siguiente problema:

Quince señoritas se pasean diariamente de a tres. ¿Cómo hay que ordenar sus paseos para que cada una de ellas se encuentre sucesivamente una sola vez en compañía de todas las otras?

Expondremos la solución que ha dado el reverendo A H. Frost, en el *Quarterly Journal of pure and applied Mathematics* (nº 41. Cambridge. 1870).

Antes que nada, observamos que cada señorita debe encontrarse diariamente con dos de sus compañeras; en consecuencia, no puede haber más de siete paseos. Además, demostraremos que es posible disponer a las muchachas conforme a las condiciones del enunciado durante los siete días de la semana. Designamos con p a una de las muchachas; podemos designar con a_1 y a_2 a las que se pasean el domingo con la señorita p; con b_1 y b_2 a las que se pasean el lunes con p; con c_1 y c_2 a las que se pasean el martes con p, y así siguienndo; en fin, con g_1 y g_2 a las que se pasean con p el sábado.

Debemos ubicar entonces bajo las siete tríadas

$$| \; p\, a_1\, a_2 \; | \; p\, b_1\, b_2 \; | \; p\, c_1\, c_2 \; | \; p\, d_1\, d_2 \; | \; p\, e_1\, e_2 \; | \; p\, f_1\, f_2 \; | \; p\, g_1\, g_2 \; |$$

siete combinaciones de cuatro tríadas formadas con las catorce letras a_1, a_2, b_1, b_2 ..... g_1, g_2, exceptuando p. y de tal modo que dos de estas letras no se encuentren juntas en más de una tríada. Por el momento, representamos a_1 y a_2 con a, b_1 y b_2

con b. y así siguiendo; las siete letras a, b, c, d, e, f, g pueden estar diversamente combinadas en siete tríadas, de modo tal que dos de ellas no se encuentren juntas más de una vez. Así, puede agruparse a con bc, de o fg; luego b con df y eg; por último, c con dg y ef; se forman así las siete tríadas fundamentales

abc, ade, afg, bdf, beg, cdg, cef

Entre estas siete tríadas hay cuatro que no contienen la letra a, que pondremos en la columna del domingo; de la misma manera, hay cuatro que no contienen la letra b; las pondremos en la columna del lunes, y así sucesivamente. Formaremos el siguiente plan:

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
p a_1 a_2	p b_1 b_2	p c_1 c_2	p d_1 d_2	p e_1 e_2	p f_1 f_2	p g_1 g_2
b d f	a d e	a d e	a b c	a b c	a b c	a b c
b e g	a f g	a f g	a f g	a f g	a d e	a d e
c d g	c d g	b d f	b e g	b d f	b e g	b d f
c e f	c e f	b e g	c e f	c d g	c d g	c e f

Hecho esto, señalaremos que cada tríada fundamental, como bdf, da cuatro combinaciones de catorce señoritas tomadas de a tres, por ejemplo:

$b_1d_1f_1$, $b_2d_2f_2$, $b_2d_1f_2$, $b_2d_2f_1$,

que pueden entrar en el cuadro de paseos de la semana. Se podrían escribir los índices 1 y 2 de varias otras maneras, pero hemos elegido la que se presenta como más natural, y lo mismo haremos con lo que siga. Escribamos estas combinaciones en las columnas respectivas que contengan bdf, es decir en las columnas del domingo, del martes, del jueves y del sábado; luego, en las mismas columnas, demos a la otra letra b, d o f un índice diferente del que ha sido escrito; obtenemos así para las cuatro últimas líneas del cuadro:

$b_1 d_1 f_1$	$a d e$	$a d_1 e$	$a b c$	$a b_1 c$	$a b c$	$a b_1 c$
$b_2 e g$	$a f g$	$a f_1 g$	$a f g$	$a f_1 g$	$a d e$	$a d_1 e$
$c d_2 g$	$c d g$	$b_1 d_2 f_2$	$b e g$	$b_2 d_1 f_2$	$b e g$	$b_2 d_2 f_1$
$c e f_2$	$c e f$	$b_2 e g$	$c e f$	$c d_2 g$	$c d g$	$c e f_2$

Ahora tomemos la tríada fundamental beg, que se encuentra, después de la primera, en el paseo del domingo, y que aparece en otras tres columnas, con sus índices respectivos

$$b_2eg,\ b_2eg,\ beg,\ beg.$$

Pongamos los otros índices, en el orden más simple, como sigue:

$$b_2e_1g_1,\ b_2e_2g_2,\ b_1e_1g_2,\ b_1e_2g_1,$$

y ubiquemos estas combinaciones en las columnas correspondientes; tendremos entonces

$b_1 d_1 f_1$	$a d e$	$a d_1 e_1$	$a b_2 c$	$a b_1 c$	$a b_2 c$	$a b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	$a f g$	$a f_1 g_1$	$a f g_1$	$a f_1 g$	$a d e_1$	$a d_1 e$
$c d_2 g_2$	$c d g$	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c e_2 f_2$	$c e f$	$b_2 e_2 g_2$	$c e_2 f$	$c d_2 g$	$c d g_2$	$c e f_2$

A la tríada fundamental cdg corresponden las cuatro combinaciones

$$c_1d_2g_2,\ cdg,\ cd_2g,\ cdg_2;$$

y completando los índices, obtenemos

$$c_1d_2g_2,\ c_1d_1g_1,\ c_2d_2g_1,\ c_2d_1g_2;$$

escribamos estas combinaciones en sus columnas respectivas, y agreguemos índices diferentes a las letras iguales; tenemos así:

$b_1 d_1 f_1$	$a\ d_2 e$	$a\ d_1 e_1$	$a\ b_2 c$	$a\ b_1 c_1$	$a\ b_2 c_1$	$a\ b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	$a\ f\ g_2$	$a\ f_1 g_1$	$a\ f\ g_1$	$a\ f_1 g_2$	$a\ d_2 e_1$	$a\ d_1 e$
$c\ d_2 g_2$	$c_1 d_1 g_1$	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c_2 e_2 f_2$	$c_2 e\ f$	$b_2 e_2 g_2$	$c\ e_2 f$	$c_2 d_2 g_1$	$c_2 d_1 g_2$	$c\ e\ f_2$

La columna del domingo está completa; pasando a la columna siguiente, encontramos la tríada fundamental ade que se presenta bajo las formas:

$$ad_2e,\ ad_1e_1,\ ad_2e_1,\ ad_1e;$$

completando los índices, tendremos

$$a_1d_2e_2,\ a_1d_1e_1,\ a_2d_2e_1,\ a_2d_1e_2.$$

Nuestro cuadro está así:

$b_1 d_1 f_1$	$a_1 d_2 e_2$	$a_1 d_1 e_1$	$a\ b_2 c$	$a\ b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_1$	$a_1 b_1 c$
$b_2 e_1 g_1$	$a_2 f\ g_2$	$a_2 f_1 g_1$	$a\ f\ g_1$	$a\ f_1 g_2$	$a_2 d_2 e_1$	$a_2 d_1 e_2$
$c_1 d_2 g_2$	$c_1 d_1 g_1$	$b_1 d_2 f_2$	$b_1 e_1 g_2$	$b_2 d_1 f_2$	$b_1 e_2 g_1$	$b_2 d_2 f_1$
$c_2 e_2 f_2$	$c_2 e_1 f$	$b_2 e_2 g_2$	$c\ e_2 f$	$c_2 d_2 g_1$	$c_2 d_1 g_2$	$c\ e_1 f_2$

Las tríadas de la forma afg son

$$a_2fg_2,\ a_2f_lg_1,\ afg_1,\ af_1g_2.$$

y se completan con

$$a_2f_2g_2,\ a_2f_1g_1,\ a_1f_2g_1,\ a_1f_1g_2:$$

lo que da

$b_1\, d_1\, f_1$	$a_1\, d_2\, e_2$	$a_1\, d_1 e_1$	$a_2\, b_2\, c$	$a_2\, b_1\, c_1$	$a_1\, b_2\, c_1$	$a_1\, b_1\, c$
$b_2\, e_1\, g_1$	$a_2\, f_2\, g_2$	$a_2\, f_1\, g_1$	$a_1\, f_2\, g_1$	$a_1\, f_1\, g_2$	$a_2\, d_2\, e_1$	$a_2\, d_1\, e_2$
$c_1\, d_2\, g_2$	$c_1\, d_1\, g_1$	$b_1\, d_2\, f_2$	$b_1\, e_1\, g_2$	$b_2\, d_1\, f_2$	$b_1\, e_2\, g_1$	$b_2\, d_2\, f_1$
$c_2\, e_2\, f_2$	$c_2\, e_1\, f_1$	$b_2\, e_2\, g_2$	$c\, e_2\, f_1$	$c_2\, d_2\, g_1$	$c_2\, d_1\, g_2$	$c\, e_1\, f_2$

Por último, la consideración de la tríada fundamental abc, completada así

$$a_2b_2c_2,\ a_2b_1c_1,\ a_1b_2c_1,\ a_1b_1c_2.$$

conduce al cuadro definitivo:

Domingo	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado
$p\, a_1\, a_2$	$p\, b_1\, b_2$	$p\, c_1\, c_2$	$p\, d_1\, d_2$	$p\, e_1\, e_2$	$p\, f_1\, f_2$	$p\, g_1\, g_2$
$b_1\, d_1\, f_1$	$a_1\, d_2\, e_2$	$a_1\, d_1 e_1$	$a_2\, b_2\, c_2$	$a_2\, b_1\, c_1$	$a_1\, b_2\, c_1$	$a_1\, b_1\, c_2$
$b_2\, e_1\, g_1$	$a_2\, f_2\, g_2$	$a_2\, f_1\, g_1$	$a_1\, f_2\, g_1$	$a_1\, f_1\, g_2$	$a_2\, d_2\, e_1$	$a_2\, d_1\, e_2$
$c_1\, d_2\, g_2$	$c_1\, d_1\, g_1$	$b_1\, d_2\, f_2$	$b_1\, c_1\, g_2$	$b_2\, d_1\, f_2$	$b_1\, e_2\, g_1$	$b_2\, d_2\, f_1$
$c_2\, e_2\, f_2$	$c_2\, c_1\, f_1$	$b_2\, e_2\, g_2$	$c_1\, e_2\, f_1$	$c_2\, d_2\, g_1$	$c_2\, d_1\, g_2$	$c_1\, e_1\, f_2$

13. Los tres pensionados

Por un procedimiento análogo al que precede. Frost ha demostrado que se puede extender el enunciado del problema de las quince señoritas a los casos en que el número de muchachas sea igual a uno de los números

63, 255, 1023...

Y, en general, a todas las potencias de 2, de exponente par, a las que se les resta una unidad. Se encontrará la solución en la memoria citada; pero indicaremos aquí un procedimiento que permite extender la solución del problema, supuestamente resuelto para un gran número de muchachas, a un número tres veces más grande.

Así, hemos resuelto el problema para 9 y para 15 señoritas; el procedimiento siguiente, debido a Walecki, permite resolverlo para un número igual a

27, 81, 243...

o a

45, 135, 40 ...

Tomaremos como ejemplo el número de 45 señoritas, y supondremos a las muchachas repartidas en tres pensionados que tengan el mismo número de alumnas. Designémoslos así:

1^er^ Pensionado – $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1\ g_1\ h_1\ i_1\ j_1\ k_1\ l_1\ m_1\ n_1\ o_1$;

2^do^ Pensionado – $a_2\ b_2\ c_2\ d_2\ e_2\ f_2\ g_2\ h_2\ i_2\ j_2\ k_2\ l_2\ m_2\ n_2\ o_2$;

3^er^ Pensionado – $a_3\ b_3\ c_3\ d_3\ e_3\ f_3\ g_3\ h_3\ i_3\ j_3\ k_3\ l_3\ m_3\ n_3\ o_3$.

Observaremos que cada una de las muchachas, por tener 44 compañeras, debe realizar 22 paseos. Inmediatamente se obtienen siete *particulares*, organizando los paseos por pensionado, tal como se ha explicado más arriba; nos falta obtener quince paseos *generales*, compuestos de tríadas de muchachas pertenecientes a pensionados distintos.

Para el primer paseo general, reuniremos a las jóvenes de a tres, siguiendo las columnas verticales, lo que permite formar las tríadas

$$a_1a_2a_3,\ b_1b_2b_3,\ c_1c_2c_3, \ldots,\ o_1o_2o_3$$

Para obtener el segundo paseo general, agregamos a continuación del segundo pensionado a la primera alumna, y a continuación del tercero, a las dos primeras alumnas; tenemos así:

1^er^ Pensionado – $a_1\ b_1\ c_1\ d_1\ e_1\ f_1\ g_1\ h_1\ i_1\ j_1\ k_1\ l_1\ m_1\ n_1\ o_1$;

2^do^ Pensionado – $b_2\ c_2\ d_2\ e_2\ f_2\ g_2\ h_2\ i_2\ j_2\ k_2\ l_2\ m_2\ n_2\ o_2\ a_2$;

3^er^ Pensionado – $c_3\ d_3\ e_3\ f_3\ g_3\ h_3\ i_3\ j_3\ k_3\ l_3\ m_3\ n_3\ o_3\ a_3\ b_3$.

Ahora reunimos a las jóvenes en columnas verticales, formando las tríadas

$$a_1b_2c_3,\ b_1c_2d_3,\ c_1d_2e_3, \dots,\ o_1a_2b_3$$

El tercer paseo general y los siguientes se obtendrán repitiendo sucesivamente la misma táctica; después del paseo decimoquinto, nos volvemos a encontrar con la primera formación.

Es fácil constatar que estos diversos paseos satisfacen las dos condiciones del enunciado, a saber: que cada alumna debe estar una vez, y nada más que una, con todas sus compañeras. Esto se deduce, por otra parte, de un teorema de aritmética demostrado al final del problema de las ocho damas en el juego de ajedrez.

En general, si se sabe resolver el problema de n señoritas agrupadas de a tres, se sabrá también resolverlo en el caso de 3*n* señoritas. En efecto, primero observamos que n debe ser múltiplo de tres; siendo (½)(*n* - 1) el número de paseos, el número *n* es pues impar. Para 3*n* señoritas, se realizan, en primer término, (½)(*n* - 1)paseos particulares; luego, por el procedimiento que antecede, n paseos generales; enseguida, el total de *n* + (½)(*n* - 1) o (½)(3*n* - 1), que es el número exigido por el enunciado.

14. Los p pensionados

De un modo mucho más general, se resolverá el problema siguiente, en el cual p designa un número primo y q un número entero cualquiera.

Dado un número p^q de señoritas que se pasean diariamente en grupos de p señoritas, ¿cómo hay que ordenar los paseos para que cada una de las muchachas se encuentre sucesivamente una sola vez en compañía de todas las otras?

En efecto, supongamos que se haya podido formar el cuadro de paseos de n señoritas en grupos de p; por empezar, *n* es un múltiplo de p; además, cada muchacha se encuentra cada día con otras (p - 1); en consecuencia, el número total de paseos de las n muchachas debe ser (*n* - 1)/(*p* - 1).

Vamos a demostrar que el problema es posible para el caso de n^p señoritas en grupos de p. El número de paseos debe ser (*np* - 1) /(*p* - 1); así obtendremos este número: p - 1

1º. - Por (*n* - 1)/(*p* - 1) paseos particulares de señoritas igualmente repartidas en *p* pensionados;

2º.- Por n paseos generales obtenidos por un procedimiento análogo al que acabamos de indicar más arriba. Y se llega a:

$$\frac{n-1}{p-1}+n=\frac{np-1}{p-1}$$

Suponiendo primero $n = p$ se llega paulatinamente al caso de p^q señoritas. Estos problemas conducen a la teoría de los cuadrados diabólicos y, en consecuencia, a los principios fundamentales de la geometría de los tejidos de hilos rectilíneos.

15. Otra vez las nueve musas

Podemos resolver más simplemente el problema de las nueve musas del modo siguiente: designemos a las musas con las letras a, b, e, d, e, f, g, h, k; Y consideremos el cuadro

$$\begin{vmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & \mathbf{f} \\ \mathbf{g} & \mathbf{h} & \mathbf{k} \end{vmatrix}$$

Para la primera reunión, se agruparán las letras por líneas, lo que da las tres triadas

I. --» abe, def, ghk.

Para la segunda reunión, se agruparán las letras en columnas verticales; lo que da las triadas

II. --» adg, beh, efk.

Para la tercera reunión, se agruparán las letras paralelamente a la diagonal ak. suponiendo que se escribe por segunda vez el cuadro A, a la derecha del primero;

se tienen así las tríadas

III. --» aek, bfg, edh.

Por fin, para la cuarta reunión, se agruparán las letras paralelamente a la diagonal cg, suponiendo otra vez que se repite el cuadro A. Se forman así las triadas

IV. --» eeg, afh, bdk.

Es fácil advertir que dos letras cualesquiera no se juntan más que una vez en una de las triadas precedentes, puesto que las líneas que unen dos letras tienen inclinaciones siempre diferentes. En consecuencia, el cuadro A nos mostrará, para abreviar, las cuatro reuniones de las nueve musas.

16. El problema de Walecki

El cuadro A no encierra todas las combinaciones de las nueve letras tomadas de a tres. En efecto, se sabe, gracias a una fórmula muy conocida, que el número de combinaciones de nueve letras en grupos de tres es 84. Es pertinente entonces preguntarse si, con las otras 72 combinaciones, es posible formar cuadros análogos al cuadro A; en otros términos, vamos a resolver el problema siguiente:

Disponer las ochenta y cuatro combinaciones de nueve letras, en grupos de tres, en siete cuadros de doce tríadas, de modo tal que en todos los cuadros encontremos cada una de las nueve letras una sola vez con las ocho restantes.

Para mayor comodidad, escribiremos el cuadro de las doce tríadas en la siguiente forma:

$$\begin{vmatrix} P & a & b \\ c & d & Q \\ e & f & g \end{vmatrix}$$

Se obtiene un nuevo cuadro de cuatro reuniones, de acuerdo a las condiciones del enunciado, dejando fijas P y Q, y permutando circularmente las siete letras a, b, c, d, e, f, g, es decir, reemplazando cada una de ellas por la siguiente, y la última por la primera; se obtiene así el nuevo cuadro:

$$\begin{vmatrix} P & b & c \\ d & e & Q \\ f & g & a \end{vmatrix}$$

Los otros cinco cuadros se obtendrán por nuevas permutaciones circulares.

En efecto, en el cuadro 1 podemos considerar cuatro clases de triadas:

1º Las que contienen a la vez P y Q;

2º Las que contienen P sin contener Q;

3º Las que contienen Q sin contener P;

4º Las que no contienen ni P ni Q.

La combinación que contiene P y Q en el primer cuadro es PQf; por permutaciones circulares sucesivas, se tendrá, para el primer cuadro y los siguientes, las triadas

PQf, PQg, PQa, PQb, PQc, PQd, PQe,

y se advierte que estas tríadas son distintas, puesto que difieren en la última letra.

Las combinaciones del primer cuadro que contienen P sin contener Q son

Pab, Pce, Pdg;

por permutaciones circulares sucesivas, la primera de ellas da las tríadas

III. --» Pab, Pbc, Ped, Pde, Pef, Pfg, Pga.

Todas estas combinaciones son distintas, puesto que la segunda letra de cada una de ellas es diferente, y la tercera es la que sigue inmediatamente a la segunda en el orden circular abcdefga. Diremos que estas combinaciones pertenecen al tipo P (o).

Asimismo, mediante permutaciones circulares sucesivas, la segunda combinación Pee da las tríadas.

IV. --» Pce, Pdf, Peg, Pfa, Pgb, Pac, Pbd.

Todas estas combinaciones son distintas, puesto que la segunda letra de cada una de ellas es diferente, y la tercera se encuentra siempre dos lugares después de la segunda en el orden circular ya considerado. Diremos que estas combinaciones pertenecen al tipo P (1). Por otra parte, ellas difieren totalmente de las tríadas de la serie III.

La combinación Pdg pertenece al tipo P (2); por permutaciones circulares sucesivas, ella da siete combinaciones diferentes entre sí y distintas de las tríadas de las series III y N.

Se seguirá el mismo razonamiento para las combinaciones que contienen Q sin contener P, es decir

Qde, Qac, Qfb.

y que pertenecen respectivamente a los tipos Q(0), Q(1), Q(2).

En fin, las combinaciones que no contienen ni P ni Q son

efg, gac, deb, bfc, fad;

en la primera, no hay intervalo entre e y f. ni entre f y g en el orden circular. pero entre g y e hay cuatro letras intermedias; diremos que esta combinación pertenece al tipo 004. Operando del mismo modo con las siguientes, encontramos que las cinco tríadas que no contienen ni P ni Q pertenecen a los tipos

004, 013, 031, 022, 112.

Estos tipos son distintos y. por consiguiente, las permutaciones circulares sucesivas de estas tríadas darán treinta y cinco combinaciones necesariamente diferentes entre sí y distintas de las precedentes.

Así, en resumen, hemos agrupado en siete cuadros de cuatro reuniones, es decir, de doce combinaciones, las ochenta y cuatro combinaciones de nueve letras en grupos de tres. En las combinaciones de cada reunión, encontramos nada más que una vez las combinaciones de letras tomadas de a dos, y las tría das son diferentes en el conjunto de los cuadros.

17. Soluciones de Peirce

Ya iniciada la impresión del presente volumen, recibimos una memoria muy interesante sobre el problema de las señoritas.[14] Este artículo nos fue remitido desde Washington por el hijo del autor, C. S. Peirce, bastante conocido gracias a sus curiosas publicaciones acerca del *Algebra de la lógica*. Por el momento, nos limitaremos a retomar el problema de las quince jóvenes y a exponer una solución muy diferente de aquella que hemos indicado más arriba. Señalamos, sin embargo, que la solución menos simple de Frost conduce a una generalización a la que no se llega aquí.

Designamos con la letra p a una de las muchachas; dividimos a las otras catorce en dos grupos de siete, y las representamos así:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$$
$$b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7$$

Hecho esto, consideramos uno cualquiera de los tres cuadros

p	a_1	b_1	p	a_1	b_1	p	a_1	b_1
a_2	a_4	b_3	a_2	a_4	b_5	a_2	a_7	b_6
a_3	a_7	b_5	a_3	a_7	b_2	a_3	a_6	b_4
a_5	a_6	b_2	a_5	a_6	b_3	a_4	a_5	b_7
b_4	b_6	b_7	b_4	b_6	b_7	b_2	b_3	b_5

Cada uno contiene a las quince jóvenes agrupadas de a tres; además, en un mismo

[14] *Cyclic solutions of the school-girl puzzle*, por Benjamin Peirce, profesor de astronomía y matemáticas en Harvard University (*The Astronomica Journal*. de Gould, vol. VI. pp. 169-174. Cambridge, Massachussets, 7 de diciembre de 1860).

cuadro, la diferencia entre los índices de dos letras iguales nunca se repite dos veces; lo mismo ocurre con la diferencia entre los índices de una letra 8 y de una letra b; en consecuencia, si tomamos como paseo del domingo el que corresponde al primer cuadro, por ejemplo, se obtendrá el del lunes sumando una unidad a los índices de 8 y de b. el del martes sumando dos unidades a los índices de 8 y de b, y así sucesivamente, teniendo el cuidado de suprimir en estos índices los múltiplos de 7.

F I N